ᲘᲕᲐᲜᲔ ᲯᲐᲕᲐᲮᲘᲨᲕᲘᲚᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲝᲑᲘᲡ ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ
ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘ

ᲡᲐᲑᲐᲙᲐᲚᲐᲕᲠᲝ ᲜᲐᲨᲠᲝᲛᲘ

პოლინომიალური მატრიც-ფუნქციების სპექტრალური ფაქტორიზაცია და კომპაქტური ვეივლეტები

ავტორი:
ნიკა ᲡᲐᲚᲘᲐ

ხელმძღვანელი:
ასოცირებული
პროფესორი
ლაშა ᲔᲤᲠᲔᲛᲘᲫᲔ

ᲖᲣᲡᲢ ᲓᲐ ᲡᲐᲑᲣᲜᲔᲑᲘᲡᲛᲔᲢᲧᲕᲔᲚᲝ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ
ᲤᲐᲙᲣᲚᲢᲔᲢᲘᲡ ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲘᲡ ᲛᲘᲛᲐᲠᲗᲣᲚᲔᲑᲐ

თბილისი 2013 წ.

სარჩევი

1 ანოტაცია

ცნობილია, რომ სხვადასხვა სახის პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა, მართვისა და კომუნიკაციების თეორიაში დაიყვანება დადებითად განსაზღვრულ მატრიც-ფუნქციების სპექტრალურ ფაქტორიზაციაზე. ფაქტორიზაციის ალგორითმი კი 20 წელიწადზე მეტია რაც არსებობს. მოგვიანებით ცნობილი გახდა, რომ ფაქტორიზაცია დიდ როლს თამაშობს კომპაქტური ვეივლეტ მატრიცების აგებაში. ვეიველეტები გამოიყენება მრავალ სფეროში, როგორებიცაა: უსადენო კომუნიკაციები, მონაცემთა წარმოდგენა და შეკუმშვა, წყაროსა და არხების კოდირება, სიგნალების დამუშავება და სხვა (იხიელთ [5]). ნაშრომში განხილულია პოლინომიალური მატრიცების სპექტრალური ფაქტორიზაციის ალგორითმი, რომელიც ბოლო წლებში შეიქმნეს ქართველმა მათემატიკოსებმა (იხილეთ [3]). დაიწერა ამ ალგორითმების შესაბამისი პროგრამა Wolfram Mathematica 8-ის გამოყენებით. ასევე ნაშრომში განხილულია, ფაქტორიზაციის მეთოდზე დაყრდნობილი ვეივლეტ-მატრიცების ''გენერირებ-ისა'' (ვეიველეტ მატრიცის აგების) და ''შევსების'' (ვეიველეტ მატრიცის აგება მოცემული პირველი სტრიქონით) (იხილეთ [1]), ალგორითმები და შედარებულია სხვა ალგორითმს.

საკვანძო სიტყვები: ვეივლეტ მატრიცები, უნიტრაული მატრიცები, ვინერ-ჰოფის ფაქტორიზაცია, ვეივლეტ მატრიცების შევსების ალგორითმი, სპექტრალური ფაქტორიზაცია.

2 Abstract

Wavelets have found beneficial applicability in various aspects of wireless communication systems design, including channel modeling, transceiver design, data representation, data compression, source and channel coding, interference mitigation, signal denoising and energy efficient networking.

Factorization of compact wavelet matrices into primitive ones has been known for more than 20 years. This method makes it possible to generate wavelet matrix coefficients and also to specify them by their first row. Recently, a new parameterization of compact wavelet matrices of the same order and degree has been introduced by the last author. This method also enables us to fulfill the above mentioned tasks of matrix constructions. In the present paper, we briefly describe the corresponding algorithms based on two different methods, and numerically compare their performance.

Keywords: Wavelet matrices, paraunitary matrix polynomials, Winer-Hopf factorization, Wavelet matrix completion algorithm, spectral factorization, matrix decomposition.

3 შესავალი

ვეივლეტები გამოიყენება სიგნალების დამუშავებისათვის. დროის დის-კრეტულ მომენტებში მიღებული სიგნალებიდან აღადგენს დროში უწყვეტი სიგ ნალს. ვეივლეტ მატრიცების კლასი არის ერთგვარი განზოგადოება (იხ-ილეთ [2]) კვადრატული ორთოგონალური (უნიტარული) მატრიცების. თითოეული ვეივლეტ მატრიცს გააჩნია სრულყოფილი ინფორმაცია შესა-ბამისი ვეიველეტ სისტემის შესახებ (იხილეთ [6]). ეს არის ერთ-ერთი ძირი-თადი დამაკავში-რებელი ჯაჭვი ვეივლეტების მკაცრ მათემატიკურ თეორი-ასა და პრაქტიკულ მხარეს შორის.

ცნობილია, რომ ვეიველეტ მატრიცების აგებაში, სპექტრალური ფაქ-ტრიზაცია დიდ როლს თამაშობს. სპექტრალური ფაქტორიზაციიის ალგო-რითმი ერთგაზმომილებიან შემთხვევაში საკმაოდ მარტივი და კარგად ცნო-ბილი ამოცანაა, ცნობილია როგორც ფეიერ-რისის ლემა(იხილეთ [4], [7]). გამოიყენება ერთგანზომილებიანი სისტემებისათვის. არსებობს მრავალი მეთოდი ამ ამოცანის გადასაჭრელად, ხოლო მრავალგანზომილებიან შემ-თხვევაში ამოცანა საკმაოდ რთულდება და საინტრესო ხდება ვინაიდან ამოცანა აქტუალურია მრავალგანზომილებიანი სისტემების მუშაობისთვის. ფაქტორიზაციის ამოცანა პირველად დასვა ვინერმა და მას შემდგეგ შეიქმნა მრავალი მეთოდი მატრიც ფუნქციების სპექტრალური ფაქტორიზაციისათ-ვის. რადგან ყოველ მეთოდს აქვს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი მხარე, თეორიულად შეუძლებელი გახდა მათი შედარება. რამდენიმე წლის წინ ქართველმა მათემატიკოსებმა (იხილეთ [3]) შექმნეს კიდევ ერთი ახალი მეთოდი,რომელიც უკეთესი უნდა ყოფილიყო უკვე არსებულ მეთოდებთან შედარებით. ამისათვის დამუშავდა მათემატიკური შედეგი და მიეცა ალგო-რითმული ფორმა და დაიწერა პროგრამა, რათა შედარებულიყო ძველ მე-თოდებს.

(I) აღნიშვნები

გამოყენებული აღნიშვნები:

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$P^*(z) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{a}_k z^{-k}$$

სადაც $P(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$, აღსანიშნავია, რომ $P^*(z) = \overline{P(z)}$, $z \in \mathbb{T}$. $P(z)$ პოლინომის ერთგანზომილებიანი სპექტრალური ფაქტორიზაცია აღინიშნება $\sqrt{P(z)}$.

მატრიც ფუნქცია:

$$S = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,r} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{r,1} & P_{r,2} & \cdots & P_{r,r} \end{pmatrix}_{[-n,n]}$$

მატრიც ფუნქციის ერმიტულად შეუღლებული მატრიც ფუნქცია

$$S^* = \begin{pmatrix} P_{1,1}^* & P_{2,1}^* & \cdots & P_{r,1}^* \\ P_{1,2}^* & P_{2,2}^* & \cdots & P_{r,2}^* \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{1,r}^* & P_{2,r}^* & \cdots & P_{r,r}^* \end{pmatrix}_{[-n,n]}$$

აღსანიშნავია, რომ $S(z)^* = \overline{S(z)}^T$ სადაც $z \in \mathbb{T}$;

$$S_k = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,k} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{k,1} & P_{k,2} & \cdots & P_{k,k} \end{pmatrix}_{[-n,n]}$$

ინდექსი $[-n, n]$ აღნიშნავს, რომ თითოეული პოლინომის კოეფიციენტები ეკუთვნის $[-n, n]$ ჩაკეტილ ინტერვალს.

δ_{k0} კრონეკერის სიმბოლოა.

4 ამოცანის დასმა

(I) მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია

მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაცია: მოცემულია $S(z)$ მატრიცი. დადებითად განსაზღვრული $\mathbb{T}$-ს თ.ყ. წერტილზე. (ნებისმიერი ფიქსირებული $z \in \mathbb{T}$ $S(z)$ ხდება რიცხვითი მატრიცი რომლისათვისაც დადებითად განსაზღვრულობა განმარტებულია შემდეგნაირად $x^T S(z) x > 0$).

ნებისმიერი არანულოვანი x ვექტორისათვის საპოვნელია:

$$\chi(z) = \begin{pmatrix} \chi_{1,1}(z) & \chi_{1,2}(z) & \cdots & \chi_{1,r}(z) \\ \chi_{2,1}(z) & \chi_{2,2}(z) & \cdots & \chi_{2,r}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \chi_{r,1}(z) & \chi_{r,2}(z) & \cdots & \chi_{r,r}(z) \end{pmatrix}_{[0,n]}$$

მატრიცი რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$S(z) = \chi(z) \cdot \chi^*(z)$$

$$\det \chi(z) \neq 0 \quad z \in \mathbb{D}$$

ამოცანა პირველი: მოცემული დადებითად განსაზღვრული მატრიცისათვის ავაგოთ მისი ფაქტორიზაცია.

(II) ვეივლეტ მატრიცები

მულტიანალიზი არის მათემატიკის ერთ-ერთი ახალი დარგი. ეს არის სიმრავლეთა V_i $i \in Z$ მიმდევრობა შემდეგი, თვისებებით:
1. $... \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ...$;
2. $\overline{\cup V_j} = L^2(R)$;
3. $\cap V_j = 0$
4. $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
5. არსებობს ფუნქცია $\varphi \in V_0$ ისეთი რომ $\varphi(x-n) \quad n \in Z$ ორთოგონალური ბაზისიაV_0-ში φ ფუნქციას ეწოდება დედა ვეიველეტი (მასშტაბის ფუნქცია). $\psi_i \quad i \in 1, 2, 3, ..., m-1$ ფუნქციებს კი ვეივლეტები რომლებიც წარმოადგენენ V_0-ის ორთოგონალურ დამატების ბაზისს V_1 სივრცემდე.

არსებობს მულტიანალიზის სხვა ტოლფასი წარმოდგენა მატრიცების საშუალებით.

მატრიცას $m \times (N+1)m$ განზომილებით:

$$\mathcal{A} = (A_0\, A_1\, \ldots\, A_N) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{(N+1)m}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{(N+1)m}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{(N+1)m}^m \end{pmatrix}$$

(A_j კვადრატული მატრიც ბლოკებია) ეწოდება *ვეიველეტ მატრიცი* თუ აკმაყოფილებს ეგრეთწოდებულ წაძრული ორთოგონალურობის პირობას

$$\sum_{j=0}^{N-k} A_j A_{j+k}^* = \delta_{k0} I_m\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

და შემდეგ პირობას

$$\mathbf{A}(1) = I_m$$

თუ $\mathcal{A}$ მატრიცს წარმოვიდგენთ პოლიფაზური სახით,

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{k=0}^{N} A_k z^k =: \{\mathbf{a}_{ij}(z)\}_{i,j=1}^m\,,$$

ორთოგონალურობის პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს (ტოლფასი პირობა)

$$\mathbf{A}(z)\widetilde{\mathbf{A}}(z) = I_m\,,$$

სადაც

$$\widetilde{\mathbf{A}}(z)=\sum_{k=0}^{N}A_k^*z^{-k}$$

ვეივლეტების ეს ორი მიმდინარეობა ვითარდებოდა პარალელურად, მოგვიანებით კი ცნობილი გახდა, რომ ყოველი ვეივლეტ მატრიციდან შესაძლებელია აიგოს როგორც დედა ასევე შვილი ვეივლეტები და პირიქით . აღსანიშნავია, რომ მატრიცის პირველი სტრიქონიდან აიგება დედა ვეივლეტი და პირიქით.

შესაბამისად დაისვა ორი ამოცანა.

ამოცანა მეორე: ავაგოთ ვეივლეტ მატრიცი მოცემული განზომილებით.

ამოცანა მესამე: ავაგოთ ვეივლეტ მატრიცი რომლის პირველი სტრიქონი მოცემულია, ანუ დედა ვეივლეტი ფიქსირებულია წაძრული ორთოგონალურობის პირობით $\sum_{j=1}^{(N+1-k)m}a_j^1\overline{a}_{j+km}^1=\delta_{k0}\,,\quad k=0,1,\dots,N,$

5 ფეიერ რისის ლემა

მოცემულია ტრიგონომეტრიული პოლინომი:

$$P(z)=\sum_{j=-n}^{n}c_jz^j$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$P(z)\geq 0\quad \text{, სადაც }\ z\in\mathbb{T}.$$

არსებობს ერთადერთი პოლინომი (მოდულით ერთი კონსტანტის სიზუსტით) $P^+(z)=\sum_{j=0}^{n}\gamma_jz^j$ რომელსაც არ აქვს ნული $\mathbb{D}$-ში და

$$P(z)=P^+(z)\widetilde{P^+}(z)=\sum_{j=0}^{n}\gamma_jz^j\cdot\sum_{j=0}^{n}\overline{\gamma_j}z^{-j}\qquad z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

მეტიც, თუ P პოლინომი ნამდვილია $c_j\in\mathbb{R}$, მაშინ იარსებებს ნამდვილ კოეფიციენტებიანი P^+ ($\gamma_j\in\mathbb{R}$).

ყოველ ასეთ დაშლას ერთგანზომილებიან სპექტრალურ ფაქტორიზაციას უწოდებენ.

დამტკიცება

თუ $z\in\mathbb{T}$ მაშინ $z\cdot\overline{z}=1\Longrightarrow z=1/\overline{z}\Longrightarrow\widetilde{P}(z)=\overline{P(z)}$ გამოდის, რომ $\widetilde{P}(z)=\overline{P(z)}=P(z)$ $z\in\mathbb{T}$. ერთადერთობის თეორემიდან მივიღებთ,

$$\widetilde{P}(z)=P(z)\qquad z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$$

საიდანაც,
$$\sum_{j=0}^{n}\gamma_j z^j=\sum_{j=0}^{n}\overline{\gamma_j}z^{-j}\Longrightarrow c_{-j}=\overline{c_j}\Longrightarrow$$
თუ $P(z) = 0$ მაშინ $P(z^*) = 0$ სადაც $z^* = 1/\overline{z}$. ცხადია, რომ $P(z)$-ის ფესვები იქნება ზუსტად $z^nP(z)$-ის $2n$ ცალი ფესვი. თუ $z_0 \in \mathbb{T}$ და $P(z_0) = 0$ მაშინ z_0 ფესვის ხარისხი არის ლუწი. დამტკიცება ტრივიალურია, ვუშვებთ საწინააღმდეგოს და ზოგადობის შეუზღუდავად ვიღებთ, რომ $z_0 = 1$

$$P(z)=(z-1)^{2m+1}\cdot q(z)\qquad q(1)\neq 0$$

$$P(z)=(z-1)^{2m+1}\cdot q(z)=(e^{it}-1)^{2m+1}\cdot(\beta_0+\beta(t))=$$

$$=(it+\alpha(t))\cdot(\beta_0+\beta(t))$$

$$\beta(0)=0\qquad \lim_{t\to 0}\ |\alpha(t)|/t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(it+\alpha(t))^{2m+1}\cdot(k+\beta(t))}{t^{2m+1}}=i^{2m+1}k$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{(it+\alpha(t))^{2m+1}\cdot(k+\beta(t))}{t^{2m+1}}=\lim_{t\to 0+}\frac{(it+\alpha(t))^{2m+1}\cdot(k+\beta(t))}{t^{2m+1}}$$

რადგანაც $\beta(.)$ უწყვეტია და $2m+1$ კენტია პოლინომი ერთეულოვან წრეწირზე გამოვა ნიშანცვალებადი, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულობას. რაც ნიშნავს, რომ $P(z)$-ის ფესვები შეიძლება გაიყოს 2 ჯგუფად,

$$\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n \text{ და } \alpha_1^*,\alpha_2^*\ldots,\alpha_n^*$$

სადაც $|\alpha_j| \geq 1$ყოველი $j = 1, 2, \ldots, n$ და $\alpha_j^* = 1/\overline{\alpha_j}$, $|\alpha_j^*| \leq 1$.

გავაფაქტოროთ $z^nP(z)$

$$z^nP(z)=C\prod_{j=1}^{n}\{(z-\alpha_j)(z-\alpha_j^*)\},$$

$$P(z)=C\prod_{j=1}^{n}\left\{(z-\alpha_j)\cdot\frac{z-\alpha_j^*}{z}\right\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\frac{z-\alpha^*}{z} = -\alpha^*(z^{-1}-\frac{1}{\alpha^*}) = -\alpha^*(z^{-1}-\overline{\alpha})$.

$$S(z)=C_1\prod_{j=1}^{n}\{(z-\alpha_j)(z^{-1}-\overline{\alpha_j})\}.$$

რადგანაც $C_1 > 0$

$$P^+(z) = \sqrt{C_1}\prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j).$$

მივიღეთ ფაქტორიზაცია, ამასთან პოლინომი რომელსაც არ აქვს არცერთი ფესვი $\mathbb{T}$-ში ერთადერთია.

6 შურის ალგორითმი

შურის ალგორითმი ცნობილი როგორც გადაადგილების სტრუქტურა, წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ერთ-ერთი სწრაფი მეთოდი. პირველ რიგში უნდა აღინიშნოს, რომ $n \times n$ განზომილების წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას სჭირდება $O(n^3)$ რიგის ოპერაცია. შურის ალგორითმი გარკვეული ტიპის სისტემებს ხსნის $O(n^2m)$ ოპერაციაში. (m გაცილებით პატარაა n-ზე ან დამოუკიდებელია n-გან)

(I) გადაადგილების სტრუქტურის მქონე მატრიცები

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z მატრიცს გააჩნია თვისება,

$$Z \cdot A =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot Z =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & \\ . & . & \dots & . & \dots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ . & . & \dots & . & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ \vdots & & & & & \\ . & . & \dots & . & \dots & \\ 0 & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \\ 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

R $(n \times n)$ ერმიტულად თვითშეუღლებული მატრიცს აქვს გადანაცვლებადი სტრუქტურა (Displacement Structure) თუ $R_Z := R - ZRZ^*$ მატრიცს აქვს გაცილებით პატარა რანგი ვიდრე n ან რანგი არ არის დამოკიდებული n-ზე. თუ R_Z-ის რანგი r-ია მაშინ: $R_Z = GJG^*$, სადაც G $n \times r$ განზომილების მატრიცაა, J დიაგონალური მატრიცაა, რომლის დიაგონალური ელემენტებიდან პირველი p ელემენტი 1-ია და დანარჩენი -1.საჭიროებიდან გამომდინარე და ფორმულების მარტივად ჩაწერისთვის განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც $J = I$; (ზოგადი შემთხვევისათვის ალგორითმის აღწერა და დამტკიცება ანალოგიურია) ; $R_Z = GJG = GG^*$ და რადგან $Z^n = 0$ ამიტომ:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} Z^i (R - ZRZ^*) Z^{*i}$$

ხოლო თუ G მატრიცს წარმოვადგენთ სვეტვექტორებით

$$G = [x_0, x_1, ..., x_{r-1}]$$

მაშინ:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} Z^i (R - ZRZ^*) Z^{*i} = \sum_{i=0}^{n-1} Z^i G G^* Z^{*i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} x_i x_i^* = \sum_{i=0}^{r-1} L(x_i) L^*(x_i)$$

სადაც $L((y_1, y_2, y_3, ..., y_n)) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & 0 \\ y_3 & y_4 & y_5 & \dots & 0 & 0 \\ y_4 & y_5 & y_6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ . & . & \dots & . & \dots & \\ y_{n-1} & y_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ვეიველეტ მატრიცის აგებისა და შევსების ალგორითმებში (განხილულია შემდეგ თავში) გვიწევს ამოვხსნათ სისტემა $\Delta \cdot X = b$ რამდენიმე b ვექტორისათვის, სადაც

$$\Delta = \Theta_1 {\Theta_1}^* + \Theta_2 {\Theta_2}^* + \ldots + \Theta_{m-1} \Theta_{m-1}^* + I_{N+1} * I_{N+1}^*$$

და

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i0} & \eta_{i1} & \eta_{i2} & \cdots & \eta_{i,k-1} & \eta_{iN} \\ \eta_{i1} & \eta_{i2} & \eta_{i3} & \cdots & \eta_{iN} & 0 \\ \eta_{i2} & \eta_{i3} & \eta_{i4} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ \eta_{iN} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

ზემოთ განხილული R მატრიცის სახე ემთხვევა ამოსახსნელი Δ მატრიცის სახეს.

$$\Delta_Z = GG^*$$

$$G = \begin{pmatrix} \eta_{10} & \eta_{20} & \ldots & \eta_{m-1,0} & 0 \\ \eta_{11} & \eta_{21} & \ldots & \eta_{m-1,1} & 0 \\ \vdots & & & & \\ . & . & \ldots & . & 0 \\ \eta_{1N} & \eta_{2N} & \ldots & \eta_{m-1,N} & 1 \end{pmatrix}$$

(II) შურის ალგორითმი

ამოსახსნელია სისტემა:

$$\Delta \cdot X = b$$

ამისთვის Δ მატრიცი წარმოვადგინოთ $\Delta = UDU^*$ სადაც U ზედა სამკუთხა მატრიცია, $D = diag[d_N^{-1}, d_{N-1}^{-1}, d_{N-2}^{-1}, ..., d_1^{-1}, d_0^{-1}]$ დიაგონალური მატრიცი. უკანასკნელი გატოლების წრფივ დროში ამოხსნა ცნობილია. Δ-ს ფაქტორიზაციისათვის კი საჭიროა ჩატარდეს N რეკურენტული ბიჯი.

$$G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_N$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} \eta_{10} & \eta_{20} & \ldots & \eta_{m-1,0} & 0 \\ \eta_{11} & \eta_{21} & \ldots & \eta_{m-1,1} & 0 \\ \vdots & & & & \\ . & . & \ldots & . & 0 \\ \eta_{1N} & \eta_{2N} & \ldots & \eta_{m-1,N} & 1 \end{pmatrix}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$D = diag[d_N^{-1}, d_{N-1}^{-1}, d_{N-2}^{-1}, ..., d_1^{-1}, d_0^{-1}]$$

U მატრიცის სვეტების არანულოვანი ნაწილები ავღნიშნოთ:

$$U_N, U_{N-1}, ..., U_1, U_0.$$

(მათი განზომილებები იქნება შესაბამისად $1, 2, 3......, N+1$);

g_n-ით ავღნიშნოთ G_n-ის ბოლო სტრიქონი

$$g_0 = \begin{pmatrix} \eta_{1N} & \eta_{2N} & \ldots & \eta_{m-1,N} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_k = G_k g_k^*$$

$$d_k = g_k g_k^*$$

$\underline{U}_k$ აღნიშნავს U_k-ს ბოლო ელემენტის გარეშე (კერძოდ d_k-ს გარეშე).
$\overline{U}_k$აღნიშნავს U_k-ს პირველი ელემენტის გარეშე.

$$V_k = \overline{U}_k - \underline{U}_k$$

$$M_k = V_k g_k \frac{1}{d_k}$$

$\underline{G}_k$ აღნიშნავს G_k-ს წაშლილი ბოლო სტრიქონით (კერძოდ g_k-ს გარეშე).

$$\mathbf{G_{k+1} = M_k + \underline{G}_k}$$

7 სპექტრალური ფაქტორიზაციის ალგორითმი

სპექტრალური ფაქტორიზაციის ამოცანა უკვე დასმულია. ალგორითმს კი ამ თავში წარმოგიდგენთ. ალგორითმის იდეა მარტივია, ამონახსნი აიგება რეკურენტული ფორმულის საშუალებით. რეკურენტული ფორმულის ბაზისია:

$$\chi^{(1)}(z) = \sqrt{S_{11}(z)}$$

საპოვნელია

$$\chi^{(r)}(z) = \chi(z)$$

ამისათვის განვსაზღვროთ ბიჯი, დავუშვათ რომ ნაპოვნია:

$$\chi^{(m-1)} = \begin{pmatrix} \chi^{(m-1)}_{1,1} & \chi^{(m-1)}_{1,2} & \cdots & \chi^{(m-1)}_{1,m-1} \\ \chi^{(m-1)}_{2,1} & \chi^{(m-1)}_{2,2} & \cdots & \chi^{(m-1)}_{2,m-1} \\ . & . & \cdots & . \\ \chi^{(m-1)}_{m-1,1} & \chi^{(m-1)}_{m-1,2} & \cdots & \chi^{(m-1)}_{m-1,m-1} \end{pmatrix}_{[0,n]}$$

რომლისათვისაც ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა:

$$\chi^{(m-1)}(\chi^{(m-1)})^* = S_{m-1}$$

და ასაგებია $\chi^{(m)}$, რომლისათვისაც შესრულდება:

$$\chi^{(m)}(\chi^{(m)})^* = S_m$$

მოვძებნოთ ამონახსნი შემდეგი ფორმით:

$$\hat{\chi}^{(m)} = \begin{pmatrix} \chi_{1,1}^{(m-1)} & \chi_{1,2}^{(m-1)} & \cdots & \chi_{1,d}^{(m-1)} & 0 \\ \chi_{2,1}^{(m-1)} & \chi_{2,2}^{(m-1)} & \cdots & \chi_{2,d}^{(m-1)} & 0 \\ . & . & \cdots & . & . \\ \chi_{m-1,1}^{(m-1)} & \chi_{m-1,2}^{(m-1)} & \cdots & \chi_{m-1,m-1}^{(m-1)} & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{m-1} & f_m^+ \end{pmatrix}$$

ბოლო სტრიქონს მოვხსნით $\mathbb{D}$-ში ანალიზურობის შეზღუდვა.

$$\hat{\chi}^{(m)}(\hat{\chi}^{(m)})^* = S_m$$

ბოლო ტოლობიდან და მატრიცების გამრავლების წესიდან მარტივად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$f_m^+ = \frac{\sqrt{\det(S_m)}_{[0,mn]}}{\sqrt{\det(S_{m-1})}_{[0,(m-1)n]}}$$

$$\chi^{(m-1)} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \\ \vdots \\ \varphi_{m-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,m} \\ S_{2,m} \\ \vdots \\ S_{m-1,m} \end{pmatrix}$$

შესაბამისად

$$\varphi_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \chi_{1,1}^{(m-1)} & \cdots & S_{1,m} & \cdots & \chi_{1,m-1}^{(m-1)} \\ \chi_{2,1}^{(m-1)} & \cdots & S_{2,m} & \cdots & \chi_{2,m-1}^{(m-1)} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ \chi_{m-1,1}^{(m-1)} & \cdots & S_{m-1,m} & \cdots & \chi_{m-1,m-1}^{(m-1)} \end{pmatrix}^*}{\sqrt{\det(S_{m-1})}^*}$$

სრულდება ტოლობა $\hat{\chi}^{(m)}(\hat{\chi}^{(m)})^* = S_m$, მაგრამ $\hat{\chi}^{(m)}$-ის ბოლო სტრიქონი არ არის $\mathbb{D}$-ში ანალიზური, ამისთვის საჭიროა ვიპოვოთ ვეიველეტ მატრიცი $U(z)$ ისეთი, რომ $\chi^{(m)}(z) = \hat{\chi}^{(m)}(z) \cdot U(z)$-ის ყოველი ელემენტი იყოს $\mathbb{D}$-ში ანალიზური. ცხადია, ტოლობა ჭეშმარიტი რჩება ვეივლეტ მატრიცის თვისებიდან გამომდინარე. $U(z)$-ის საპოვნელად, გამოიყენება ვეიველეტ მატრიცის შევსების ალგორითმი რომელსაც მოგვიანებით განვიხილავთ.

განხილული ალგორითმის შესაბამისი პროგრამა დაწერილია Wolfram Mathematica 8-ზე, რადგან იძლევა საშუალებას გამოთვლების სიზუსტე ვცვალოთ სურვილისამებრ. შესაბამისად, გამოთვლების ჩატარება ნებისმიერი სიზუსტითაა შესაძლებელი. ანუ შესაძლებელია შეფასდეს, პროგრამის მიერ დახარჯული დრო მოცემულ სიზუსტეზე.

8 ვეივლეტ მატრიცების აგება

(I) კლასიკური ალგორითმი

პირველ რიგში განვიხილოთ ვეივლეტ მატრიცების აგების, ძველი და კარგად ცნობილი ალგორითმი.

- $\mathbf{V}(z) = I_m - \mathbf{v}^*\mathbf{v} - z \cdot \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ ვეივლეტ მატრიცაა.
  სადაც $\mathbf{v}$ ვექტორია. თვისებების შემოწმება ტრივიალურია.
- $\mathbf{A}(z) = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{V}_j(z)$ ვეივლეტ მატრიცაა.
  თვისებების შემოწმება ტრივიალურია.
- ნებისმიერი $\mathbf{A}(z)$ ვეივლეტ მატრიცი წარმოდგება $\mathbf{A}(z) = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{V}_j(z)$ (იშლება მარტივ მამრავლებად)

ვეივლეტ მატრიცის აგება

ნაბიჯი 1: ავიღოთ რამდენიმე არანულოვანი ვექტორი $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^m$, $j = 1, 2, \ldots, N$ ვექტორების რაოდენობა და განზომილება დამოკიდებულია ასაგები ვეივლეტ მატირცის განზომილებაზე.

ნაბიჯი 2: ავაგოთ:

$$P_j = (\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^*)^{-1} \mathbf{v}_j^* \mathbf{v}_j \,.$$

მაშინ $\mathbf{V}_j(z) = I_m - P_j + P_j z$, $j = 1, 2, \ldots, N$ იქნებიან პრიმიტიული ვეივლეტ მატრიცები.

ნაბიჯი 3: $\mathbf{A}_0(z) = I_m$ და ყოველი $j = 1, 2, \ldots, N$

$$\mathbf{A}_j(z) = \mathbf{A}_{j-1}(z)\big(I_m - P_j(I_m - z)\big). \tag{1}$$

მატრიცების გადამრავლებას სჭირდება $m^2(j-1)$ ოპერაცია, შესაბამისად ამ მეთოდით ვეივლეტ მატრიცის ასაგებად საჭიროა $O(m^2N^2)$ რიგის ოპერაცია.

ვეივლეტ მატრიცის აგება, მოცემული სტრიქონით

მოცემულია:

$$\mathbf{a} = (a_1^1, a_2^1, \cdots, a_{(N+1)m}^1) =: (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \ldots, \mathbf{a}_N), \quad \mathbf{a}_N \neq \mathbf{0}$$

აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\sum_{j=1}^{(N+1-k)m} a_j^1 \overline{a}_{j+km}^1 = \delta_{k0} \,, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

,

$$\sum_{i=0}^{N} \mathbf{a}_i = e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^m$$

.

ნაბიჯი 1: გამოვთვალოთ

$$P_N = (\mathbf{a}_N \mathbf{a}_N^*)^{-1} \mathbf{a}_N^* \mathbf{a}_N$$

$$(\mathbf{a}_0^{(N)}, \mathbf{a}_1^{(N)} \dots, \mathbf{a}_N^{(N)}) := (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \dots, \mathbf{a}_N)$$

. ყოველი $j = N, N-1, \dots, 2$

$$\mathbf{a}_i^{(j-1)} = \mathbf{a}_i^{(j)} + (\mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{a}_i^{(j)}) P_j, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

და **ნაბიჯი 2:** გამოვთვალოთ

$$P_{j-1} = \big(\mathbf{a}_{N-1}^{(j-1)} (\mathbf{a}_{N-1}^{(j-1)})^*\big)^{-1} (\mathbf{a}_{N-1}^{(j-1)})^* \mathbf{a}_{N-1}^{(j-1)} .$$

ნაბიჯი 3: გამოვთვალოთ

$$\mathbf{A}(z) = \prod_{j=1}^{N} (I_m - P_j + P_j z)$$

ოპერაციების რაოდენობა $O(m^2 N^2)$ რიგისაა.

(II) ახალი ალგორითმი

იყენებს შემდეგ ფაქტებს.

არსებობს ქვემოთ მოცემული ურთიერთცალსახა შესაბამისობები

$$\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} A_{1,1}(z) & \mathbf{A}_{1,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{1,m}(z) \\ \mathbf{A}_{2,1}(z) & \mathbf{A}_{2,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{2,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m,1}(z) & \mathbf{A}_{m,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{m,m}(z) \end{pmatrix}$$

სადაც

$$A_{ij} \in \mathcal{P}_N^+, \quad \mathbf{A}(z) \widetilde{\mathbf{A}}(z) = I_m, \quad \det \mathbf{A}(z) = z^N$$

და

$$U(z) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z^{-N} A_{m,1} & z^{-N} A_{m,2} & \cdots & z^{-N} A_{m,m} \end{pmatrix}$$

სადაც

$$u_{ij} \in \mathcal{P}_N^+, \quad U(z) \widetilde{U}(z) = I_m, \quad \det U(z) = 1$$

შესაბამისობა ნათელია, $U(z)$ მატრიცი მიიღება $\mathbf{A}(z)$ მატრიცის ბოლო სტრიქონის z^{-N}-ზე გამრავლებით, ხოლო $\mathbf{A}(z)$ მატრიცი $U(z)$ ტიპის მატრიცისაგან

მიიღება ბოლო სტრიქონის z^N-ზე გამრავლებით.
ასევე არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა:

$$U(z)=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z^{-N}A_{m,1} & z^{-N}A_{m,2} & \cdots & z^{-N}A_{m,m} \end{pmatrix}$$

სადაც

$$u_{ij}\in\mathcal{P}_N^+,\ \ U(z)\widetilde{U}(z)=I_m,\ \ \det U(z)=1$$

და

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \zeta_1(z) & \zeta_2(z) & \zeta_3(z) & \cdots & \zeta_{m-1}(z) & 1 \end{pmatrix}\zeta_i(z)\in\mathcal{P}_N^-$$

მატრიცებს შორის. რადგანაც შემდეგ ტოლობას აქვს ადგილი:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1}(z) & \mathbf{A}_{1,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{1,m}(z) \\ \mathbf{A}_{2,1}(z) & \mathbf{A}_{2,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{2,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z^{-N}\mathbf{A}_{m,1}(z) & z^{-N}\mathbf{A}_{m,2}(z) & \cdots & z^{-N}\mathbf{A}_{m,m}(z) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \zeta_1^-(z) & \zeta_2^-(z) & \cdots & \zeta_{m-1}^-(z) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^+(z) & \cdots & \mathbf{A}_{1,m}^+(z) \\ \mathbf{A}_{2,1}^+(z) & \cdots & \mathbf{A}_{2,m}^+(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m,1}^+(z) & \cdots & \mathbf{A}_{m,m}^+(z) \end{pmatrix}$$

ე.ი. აიგება ბიექცია:

$$\mathbf{A}(z)=\begin{pmatrix} A_{1,1}(z) & \mathbf{A}_{1,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{1,m}(z) \\ \mathbf{A}_{2,1}(z) & \mathbf{A}_{2,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{2,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m,1}(z) & \mathbf{A}_{m,2}(z) & \cdots & \mathbf{A}_{m,m}(z) \end{pmatrix}$$

$$A_{ij}\in\mathcal{P}_N^+,\ \ \mathbf{A}(z)\widetilde{\mathbf{A}}(z)=I_m,\ \ \det\mathbf{A}(z)=z^N$$

და

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \zeta_1(z) & \zeta_2(z) & \zeta_3(z) & \cdots & \zeta_{m-1}(z) & 1 \end{pmatrix} \zeta_i(z) \in \mathcal{P}_N^-$$

მატრიცებს შორის.

ვეივლეტ მატრიცის აგება

ნაბიჯი 1: ავიღოთ $m-1$ ტრიგონომეტრიული პოლინომი $\mathcal{P}_N^-$

$$\zeta_i(z) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_{ik} z^{-k}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

(კოეფიციენტები γ_{ik} ნებისმიერია).

ნაბიჯი 2: ავაგოთ

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-1} \Theta_i \overline{\Theta_i} + I_{N+1},$$

სადაც Θ_i ზედასამკუთხა ჰენკელის მატრიცია, განზომილებით $(N+1) \times (N+1)$ და პირველი სტრიქონით $(0, \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{iN})$

ნაბიჯი 3: გავაფაქტოროთ მატრიცი ზედა სამკუთხა, დიაგონალურ და ქვედასამკუთხა მატრიცებად.

$$\Delta = UDU^*$$

რადგანაც Δ აქვს გადანადგილის სტრუქტურა, ოპერაციების რაოდენობა გამოთვლებისთვის გამოვა $O(m^2 N)$ რიგის.

ნაბიჯი 4: ამოვხსნათ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა,

$$\Delta X = B_j$$

m-ჯერ სადაც $B_j = (0, \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{iN})^T$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, და $B_m = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Δ გაფაქტორიზებულია ამიტომაც სისტემის ამოსახსნელად დაგვჭირდება $O(m)$ რიგის ოპერაციები.

ვთქვათ ამონახსნებია, $(\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jN})$ მაშინ

$$\mathbf{u}_j(z) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{jk} z^{-k} \text{ და } \mathbf{b}_{mj}(z) = z^N \mathbf{u}_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

ნაბიჯი 5: გამოვთვალოთ პოლინომის კოეფიციენტები $\mathcal{P}_N^+$

$$\mathbf{b}_{ij}(z) = [\widetilde{\zeta}_i(z)\mathbf{u}_j(z)]^+ - \delta_{ij}, \quad 1 \le i < m, \ 1 \le j \le m.$$

ჩასატარებელი ოპერაციების რაოდენობა $O(m^2 N \log N)$ რიგისაა.
ნაბიჯი 6: პოლინომიალური მატრიცის აგება $\mathbf{B}(z) = \{\mathbf{b}_{ij}(z)\}_{i,j=1}^m$,

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{B}(z)\big(\mathbf{B}(1)\big)^{-1}$$

ვეიველეტ მატრიცაა. შებრუნებულის საპოვნელად და მატრიცების გადასამრავლებად სჭიროა $O(Nm^3)$ რიგის ოპერაცია.

საერთო ჯამში ახალი ალგორითმით ვეივლეტ მატრიცის ასაგებად საჭიროა $O(Nm^3)$ რიგის ოპერაციები.

ვეივლეტ მატრიცის აგება, მოცემული სტრიქონით
მოცემულობა იგივეა რაც ძველი ალგორითმის შემთხვევაში.

ნაბიჯი 1:

ამოვირჩიოთ $\mathbf{a}_N = (a^1_{mN+1}, a^1_{mN+2}, \cdots, a^1_{m(N+1)})$-ის კოორდინატი, რომლის მოდულიც მაქსიმალურია. რადგანაც $\mathbf{a}_N \neq \mathbf{0}$, მოდულით მაქსიმალური განსხვავებული იქნება ნოლისაგან. ავღნიშნოთ a^1_{mN+j}. ეს ნაბიჯი გაზრდის გამოთვლების სიზუსტეს.

ნაბიჯი 2:

$\big(\mathbf{a}_{11}(z), \mathbf{a}_{12}(z), \ldots, \mathbf{a}_{1m}(z)\big)$ ასაგები მატრიცის პირველი სტრიქონია.

გამოვთვალოთ $\sum_{k=0}^N \overline{a}^1_{mk+j} z^{N-k} = z^N \widetilde{\mathbf{a}_{1j}}(z)$-ის შეუღლებული პოლინომის $(N+1)$-ე კოეფიციენტი: $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N$. (0-ის მიდამოში)

$$\zeta(z) = \sum_{k=0}^N \gamma_k z^k.$$

$O(N^2)$ რიგის ოპერაციები

ნაბიჯი 3: გამოვთვალოთ $\zeta_i(z) = [\widetilde{\mathbf{a}_{1i}}(z)\zeta(z)]^-$ ყოველი $j \neq i = 1, 2, \ldots, m$. $O(mN \log N)$ რიგის ოპერაცია.

ნაბიჯი 4: გამოვიყენოთ ვეივლეტ მატრიცის აგების ალგორითმი, მონაცემებით:

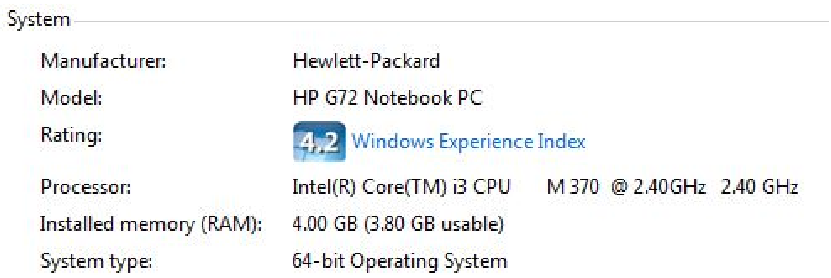
$$\zeta_1(z), \zeta_2(z), \ldots, \zeta_{i-1}(z), \zeta_{i+1}(z), \ldots, \zeta_m(z)$$

მიღებული მატრიცი ავღნიშნოთ $\mathbf{A}^{\ddagger}(z)$. თუ გავუკეთებთ ტრანსპონირებას $\mathbf{A}^{\ddagger}(z)$ და ბოლო სტრიქონს ჩავსვამთ ნომერ i სტრიქონად მივიღებთ სასურველ $\mathbf{A}(z)$ ვეივლეტ მატრიცს.

საბოლოო ჯამში ოპერაციათა რიცხვი დარჩა $O(m^3 N)$.

9 ალგორითმების შედარება

ქვემოთ მოყვანილ გრაფიკებზე მოცემულია $m \times (N+1)m$ ზომის ვეიველეტ მატრიცების აგების ძველი და ახალი ალგორითმების მუშაობის დროები. მოცემულ შემთხვევაში ორივე ალგორითმი მუშაობს ერთიდაიგივე 10^{-18} სტანდარტული სიზუსტით. ერთიდაიგივე კომპიუტერზე:

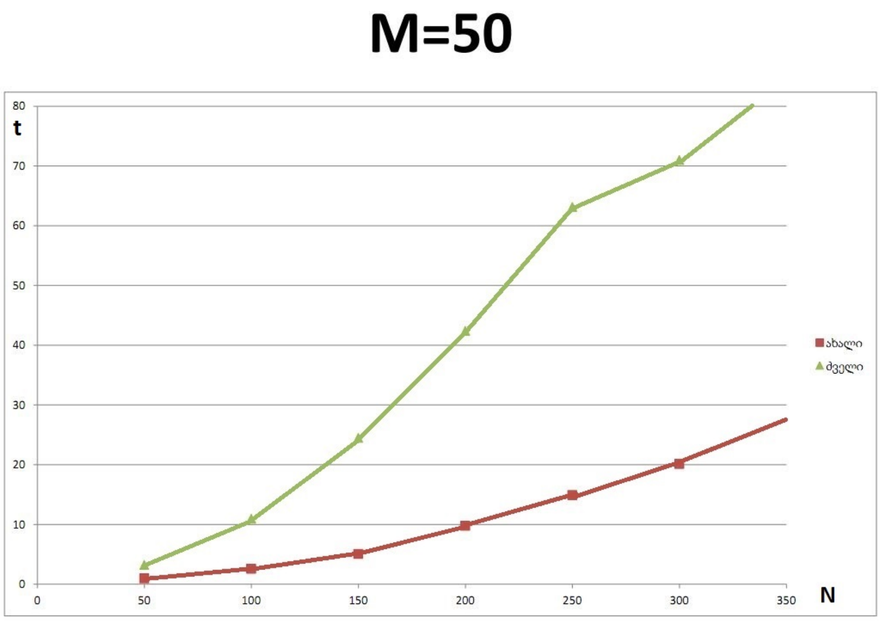

System

Manufacturer:	Hewlett-Packard
Model:	HP G72 Notebook PC
Rating:	4,2 Windows Experience Index
Processor:	Intel(R) Core(TM) i3 CPU M 370 @ 2.40GHz 2.40 GHz
Installed memory (RAM):	4.00 GB (3.80 GB usable)
System type:	64-bit Operating System

ოპერაციული სისტემა: Microsoft Windows 7 Home Premium;

აღსანიშნავია, რომ შევსების ალგორითმები ანალოგიურ სურათს იძლევა მოცემულ განზომილებებში.

კომპიუტერული ცდებით მიღებული შედეგები ემთხვევა თეირული დათვლებისას მიღებულ შედეგებს და იძლევა საშუალებას დავასკვნათ, რომ ახალი ალგორითმები ნამდვილად სჯობს უკვე არსებულთ.



10 დანართი

ნაშრომი მოიცავს Wolfram Mathematica-ში დაწერილ პროიგრამების ფაილებს (ელექტრონულად).

ბიბლიოგრაფია

[1] L. Ephremidze and E. Lagvilava, ``On compact wavelet matrices of rank m and of order and degree N", preprint, http://arxiv.org/abs/1109.3809v1, 2011.

[2] P. N. Heller, ``Rank m wavelets with n vanishing moments", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 16(2), pp. 502–519, 1994.

[3] G. Janashia, E. Lagvilava, and L. Ephremidze ``A new method of matrix spectral factorization", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 57, no. 4, pp. 2318–2326, 2011, (DOI: 10.1109/TIT.2011.2112233).

[4] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, *Linear Estimation*, Prentice Hall, Inc. 2000.

[5] J. Kautsky and R. Turcajova, ``Pollen product factorization and construction of higher multiplicity wavelets", *Lin. Algebra Appl.*, vol. 222, pp. 241–260, 1995.

[6] H. L. Resnikoff and R. O. Wells, *Wavelet Analysis*, Springer-Verlag, 1998.

[7] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, New Jersey, 1993.