ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
მათემატიკის დეპარტამენტი

ერგოდული მაქსიმალური ფუნქცია და მისი გამოყენებები

გიორგი რუხაია

ხელმძღვანელი: ლაშა ეფრემიძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დაარსების 95 წლის იუბილისადმი მიძღვნილი პირველი სტუდენტური კონფერენცია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში

2013

შესავალი

წინამდებარე ნაშრომში მოყვანილია ერგოდულობის თეორიის საწყისები, ერგოდულობის სხვადასხვა განმარტება და ერგოდული ასახვების სპეციფიკური თვისებები, ასევე შემოღებულია ერგოდული მაქსიმალური ფუნქცია და ახლებურად არის დამტკიცებული ერგოდული მაქსიმალური თეორემა, შემდეგ კი მისი გამოყენებით დამტკიცებულია სუსტი (1,1) ტიპი ერგოდული მაქსიმალური ფუნქციისთვის და ერგოდულობის ძირითადი თეორემა.

ერგოდულობის თეორიის საწყისები

ვთქვათ (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, S ზომად სიმრავლეთა σ-ალგებრით და μ ზომით, ანუ:

1.$\varnothing \in \mathrm{S}$ და $\mathrm{X} \in \mathrm{S}$

2.$A \in \mathrm{S} \to \mathrm{X} \setminus \mathrm{A} \in \mathrm{S}$

3.$\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \ldots \in \mathrm{S} \to \mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \ldots \in \mathrm{S}$

ხოლო $\mu : \mathrm{S} \to \mathrm{R}^+$ აკმაყოფილებს თვისებებს:

1.$\forall_{\mathrm{A} \in S} \mu(A) \geq 0$

2.$(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \ldots \in \mathrm{S} \wedge \forall_{i \neq j} \mathrm{A}_i \bigcap \mathrm{A}_j = \varnothing) \to \mu(\mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_i)$

ვთქვათ $T : X \to X$ არის ზომის შემნახავი ასახვა, ანუ $\forall_{A \in S} \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}) \in S \wedge \mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}))$

A -ს ეწოდება ინვარიანტული T -ს მიმართ, თუ $\mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}) \bigcup \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A}) = 0$

T -ს ეწოდება ერგოდული, თუ ინვარიანტულია მხოლოდ ნული ან სრული($\mu(\mathrm{A}) = \mu(X)$)

ზომის სიმრავლეები: $\mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}) \bigcup \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A}) = 0 \leftrightarrow (\mu(\mathrm{A}) = 0 \vee \mu(\mathrm{A}) = \mu(X))$

ლემა:

$$\forall_{A \in S} \mu(A) > 0 \to \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A})) = \mu(\mathrm{X})$$

დამტკიცება :

ვთქვათ $\mu(A) > 0$ განვიხილოთ $\mathrm{B} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A})$. ვაჩვენოთ რომ $\mu(B) = \mu(\mathrm{X})$. თუ განვიხილავთ $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B})$, ცხადია $\mathrm{T}^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{T}^{-i}(B)$ და შესაბამისად $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$ ანუ

$$\mu(B \setminus \mathrm{T}^{-1}(B) \bigcup \mathrm{T}^{-1}(B) \setminus B) = \mu(B \setminus \mathrm{T}^{-1}(B)) = \mu(B) - \mu(\mathrm{T}^{-1}(B)) = 0$$

რამდენადაც $\mu(B) \geq \mu(A) > 0$ ამიტომ, ერგოდულობის პირობით $\mu(B) = \mu(\mathrm{X})$.

ამასთან $\forall_{A\in S}\mu(A)>0 \to \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A}))=\mu(\mathrm{X})$ არის ერგოდულობის ალტერნატიული განმარტება, რადგან მისი დაშვებით მტკიცდება ერგოდულობის პირობაც:

თუ $\mu(A)>0 \wedge \mu(\mathrm{A}\backslash \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})\bigcup \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})\setminus \mathrm{A})=0$ ანუ $\mathrm{x}\in \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}) \leftrightarrow \mathrm{x}\in \mathrm{A}$ თ.ყ x-სთვის

და შესაბამისად $\mathrm{x}\in \mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A}) \leftrightarrow \mathrm{x}\in \mathrm{T}^{-i+1}(\mathrm{A})$, ანუ $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A}))=\mu(\mathrm{A})\neq \mu(\mathrm{X})$

ამ ლემის გამოყენება ხდება შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემების დასამტკიცებლად:

პუანკარეს დაბრუნებადობის თეორემა:

$$\text{თ.ყ } \mathrm{x}\in A \quad \exists_{n\in N}\ \mathrm{T}^{n}(\mathrm{x})\in A$$

თუ განვიხილავთ $\mathrm{B}=\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})$ მაშინ $\mathrm{x}\in A \to \mathrm{x}\in \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathrm{T}^{-i}(B)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{T}^{-i}(A)$ ანუ

$\exists_{n\in N}\ \mathrm{x}\in \mathrm{T}^{-n}(A)$ და შესაბამისად $\mathrm{T}^{n}(\mathrm{x})\in A$.

განვსაზღვროთ $N_A : A \to N \quad N_A(\mathrm{x})=\mathrm{n}\ \ \mathrm{T}^{n}(\mathrm{x})\in \mathrm{A}\wedge \forall_{0<i<n}\mathrm{T}^{i}(x)\notin \mathrm{A}$

თეორემა: (კაცის თეორემა)

ნებიმიერი ერგოდული ასახვისთვის და $\forall_{A\in S}\mu(A)>0$-სთვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_A N_A(x)d\mu=\mu(\mathrm{X})$$

დამტკიცება:

ავღნიშნოთ $\mu(\mathrm{A})=\mathrm{b}_0 \quad A_0=A \quad A_i=\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}_{i-1})\setminus \mathrm{A} \quad n_i=\mu(\{\mathrm{x}:N_A(\mathrm{x})=\mathrm{i}\})$ (ცხადია $b_0=\sum_{i=0}^{\infty}n_i$)

ვაჩვენოთ რომ $\mathrm{A}_i\bigcap A=\varnothing$.

ვთქვათ $x\in \mathrm{A}_i$ და $x\in \mathrm{A}_j$ მაშინ A_i-ს განამრტებით $\mathrm{T}^{i}(\mathrm{x})\in A$ და A_j-ს განამრტებით $\mathrm{T}^{i}(\mathrm{x})\in \mathrm{A}_{j-i}$. რადგანაც ნებისმიერი $\mathrm{i}>0$-სთვის $\mathrm{A}_i\bigcap A=\varnothing$, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

რადგანაც T ზომის შემნახავია და $\mathrm{x}\in \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}_i)\bigcap A \to N_A(\mathrm{x})=\mathrm{i}+1$, ამიტომ

$b_i=\mu(\mathrm{A}_i)=\mu(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}_{i-1})\setminus A)=\mu(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}_{i-1}))-\mu(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}_{i-1})\bigcap A)=b_{i-1}-n_i$ ანუ

$$b_i = b_{i-1} - n_i = b_{i-2} - n_i - n_{i-1} = \ldots = b_0 - n_i - n_{i-1} - \ldots - n_1 = \sum_{k=i+1}^{\infty} n_i$$

რადგანაც $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{T}^{-i}(A)$ ამიტომ

$$\mu(\mathrm{X}) = \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k = \sum_{i=i}^{\infty} i n_i = \int_A N_A(x) d\mu$$

ერგოდული მაქსიმალური ფუნქცია

ერგოდული მაქსიმალური ფუნქცია:

ვთქვათ მოცემულია $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ ფუნქცია. ერგოდული მაქსიმალური ფუნქცია არის ოპერატორი $\mathrm{f}^*(\mathrm{x}) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{f}(\mathrm{T}^i(\mathrm{x}))$

ერგოდული მაქსიმალური თეორემა:

$$\int_{\{\mathrm{f}^* \geq 0\}} \mathrm{f} \ \mathrm{d}\mu \geq 0$$

დამტკიცება:

$\mathrm{f}^*(\mathrm{x}) > 0 \to \exists_N \sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{f}(\mathrm{T}^i(\mathrm{x})) > 0$. ავღნიშნოთ $\mathrm{A}_n = \{\mathrm{x} : \mathrm{n} = \min\{N : \sum_{i=0}^{N} \mathrm{f}(\mathrm{T}^i(\mathrm{x})) \geq 0\}\}$

ცხადია $\{\mathrm{A}_n\}$ თანაუკვეთი სიმრავლეებია და $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n = \{\mathrm{f}^* \geq 0\}$

ანუ $\int_{\{\mathrm{f}^* \geq 0\}} \mathrm{f} \ \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathrm{A}_n} \mathrm{f} \ \mathrm{d}\mu$. ცხადია $\mathrm{A}_{i+1} \subset \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}_i)$

განვიხილოთ $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ სიმრავლეები და ვაჩვენოთ რომ $\int_{\mathrm{A}_1} \mathrm{f} \ \mathrm{d}\mu + \int_{\mathrm{A}_0} \mathrm{f} \ \mathrm{d}\mu \geq 0$

განსაზღვრით $\mathrm{x} \in \mathrm{A}_0 \to \mathrm{f}(\mathrm{x}) \geq 0$ და $\mathrm{x} \in \mathrm{A}_1 \to \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(\mathrm{T}(\mathrm{x}) \geq 0$

დავყოთ $\mathrm{f} : \mathrm{A}_0 \to \mathrm{R}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $\mathrm{K}_n = [\mathrm{n}\,\varepsilon, (\mathrm{n}+1)\varepsilon)$ რაიმე $\varepsilon > 0$

და განვიხილოთ $\mathrm{f}^{-1}(K_n)$. ცხადია $\{\mathrm{f}^{-1}(K_n)\}$ თანაუკვეთია და $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{f}^{-1}(K_n) = \mathrm{A}_0$

განვიხილოთ $\int_{K_n} \mathrm{f} \ \mathrm{d}\mu$ -ს მიახლოებად $(\mathrm{n}+1)\varepsilon\mu(\mathrm{f}^{-1}(K_n))$.

ახლა განვიხილოთ $\mathrm{P}_n = \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{f}^{-1}(K_n)) \bigcap \mathrm{A}_1$,ცხადია $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{A}_1$. რადგან $\forall_{x\in \mathrm{P}_n}\ \mathrm{T(x)} \in \mathrm{f}^{-1}(K_n)$

და რადგან $\mathrm{f\ (x)} \geq -\mathrm{f\ (T(x))} > -(\mathrm{n}+1)\varepsilon$, ავიღოთ $\int_{\mathrm{P}_n} \mathrm{f\ d}$ -ს მიახლოებად $-(\mathrm{n}+1)\varepsilon\mu(\mathrm{P}_n)$.

რამდენადაც $\int_{\mathrm{A}_0} \mathrm{f\ d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{K}_n)} \mathrm{f\ d}\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{n}+1)\varepsilon\mu(\mathrm{f}^{-1}\mathrm{K}_n)$ და

$\int_{\mathrm{A}_1} \mathrm{f\ d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathrm{P}_n} \mathrm{f\ d}\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} -(\mathrm{n}+1)\varepsilon\mu(\mathrm{P}_n)$, T -ს ზომის შემნახავობით ვიღებთ რომ

$\int_{\mathrm{A}_0} \mathrm{f\ d}\mu + \int_{\mathrm{A}_1} \mathrm{f\ d}\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{n}+1)\varepsilon(\mu(\mathrm{f}^{-1}\mathrm{K}_n) - \mu(\mathrm{P}_n)) \geq 0$.

ყოველი A_n სთვის დამტკიცების იდეა ამ შემთხვევის ანალოგიურია, იმ მოდიფიკაციით

რომ ყოველ $\mathrm{A}_i (1 \leq i \leq n)$ წარმოვადგენთ როგორც $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{T}^{-i}(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{K}_k)) \bigcap \mathrm{A}_i$ და რამდენადაც

ყოველი $x \in \mathrm{A}_n$ -სთვის $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{f(T}^i\mathrm{(x))} \geq 0$ $\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{f(T}^i\mathrm{(x))} \geq -\mathrm{f(T}^n\mathrm{(x))}$ და რადგანაც ყოველი

$x \in \mathrm{T}^{-i}(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{K}_k)$ -სთვის $\mathrm{f(T}^n\mathrm{(x))} < (\mathrm{k}+1)\varepsilon$, $\sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{K}_k)} \mathrm{f\ d} \geq -(\mathrm{n}+1)\varepsilon\mu(\mathrm{f}^{-1}\mathrm{K}_n)$ და

ინტეგრლთა ჯამი გამოვა არაუარყოფითი.

სუსტი (1,1) ტიპი ერგოდული მაქსიმალური ფუნქციისთვის:

$$\mu\{\mathrm{f}^* \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\mathrm{f}^*\geq\lambda\}} \mathrm{f\ d}\,\mu$$

დამტკიცება:

$$\mathrm{f}^*\mathrm{(x)} = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{f(T}^i\mathrm{(x))} \to \mathrm{f}^*\mathrm{(x)} - \lambda = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{f(T}^i\mathrm{(x))} - \lambda) = (\mathrm{f} - \lambda)^*\mathrm{(x)}$$

ერგოდული მაქსიმალური თეორემით $\int_{\{\mathrm{f}^*-\lambda>0\}} \mathrm{f}\ -\lambda\,\mathrm{d}\,\mu$ ვიღებთ

$$\int_{\{\mathrm{f}^*-\lambda\geq 0\}} \mathrm{f}\ -\lambda\,\mathrm{d}\,\mu = \int_{\{\mathrm{f}^*-\lambda\geq 0\}} \mathrm{f\ d}\,\mu - \int_{\{\mathrm{f}^*-\lambda\geq 0\}} \lambda\,\mathrm{d}\,\mu = \int_{\{\mathrm{f}^*-\lambda\geq 0\}} \mathrm{f\ d}\,\mu - \lambda\mu(\{\mathrm{f}^* \geq \lambda\}) \geq 0$$

აქედან ვიღებთ დასამტკიცებელს.

ლემა:

$$\text{თუ}\quad f(x)=f\circ T(x)\quad \text{თ.ყ}\quad x\in X \text{ მაშინ } f=\mathrm{const}\quad \text{თ.ყ}\, x\in X$$

დამტკიცება:

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს ორი დადებითი ზომის მქონე A_1, A_2

სიმრავლე და $r\in R$ ისეთი რომ $A_1\bigcup A_2 = X\quad x\in A_1\to f(x)\le r\,,\quad x\in A_2\to f(x)>r$

რადგან $f(x)=f\circ T(x)$, ცხადია $x\in T^{-1}(A_1)\to x\notin A_2$ და $x\in T^{-1}(A_2)\to x\notin A_1$ ანუ

$A_1=T^{-1}(A_1)$ და დაირღვა ერგოდულობის პირობა.

ერგოდულობის მრითადი თეორემა:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\ d\mu$$

დამტკიცება:

ვაჩვენოთ რომ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\ d\mu$ და $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\ d\mu$

რამდენადაც $\overline{f}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(T^i(x))=\overline{f}(T(x))$ დამტკიცებული ლემით

$\overline{f}=\mathrm{const}$, ანალოგიურად $\underline{f}(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(T^i(x))=\underline{f}(T(x))\quad \underline{f}=const$.

რამდენადაც $\int_X f\ d\mu=\int_X f\ \circ T d\mu=\ldots=\int_X f\ \circ T^n d\mu=\ldots$ და $\forall_n\int_X f\ d\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X f\ \circ T^i d\mu$ ანუ

$$\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\ d\mu=\frac{1}{\mu(X)}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X f\ \circ T^i d\mu=\frac{1}{\mu(X)}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_X\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\ \circ T^i\, d\mu\le$$
$$\le\frac{1}{\mu(X)}\int_X\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\ \circ T^i\, d\mu=\frac{1}{\mu(X)}\int_X\overline{f}\, d\mu=\overline{f}$$

ანალოგიურად მივიღებთ რომ $\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\ d\mu\ge\underline{f}$

მეორეს მხრივ, რადგან $f^*(x)\ge\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\overline{f}$ ამიტომ $\{f^*\ge\overline{f}\}=X$ და სუსტი(1,1)

ტიპის გამოყენებით $\int_X f\ d\mu\ge\overline{f}\mu(X)$ აქედან შესაბამისად $\overline{f}=\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\ d\mu$

ანალოგიურად თუ განვიხილავთ $-f$ ფუნქციას, $\overline{-f} = -\underline{f} = \frac{1}{\mu(X)}\int_X -f \, d\mu$

ანუ $\overline{f} = \underline{f} = \frac{1}{\mu(X)}\int_X f \, d\mu$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. L. Ephremidze, On the uniqueness property of various maximal operators, RIMS, Kyoto Univ,B22(2010);137-177
2. Karl E. Petersen, Ergodic Theory (Cambridge University Press), 1990;
3. L. Ephremidze, On the distribution function of the majorant of ergodic means, Studia Matematica 103(1), 1992; 1-15;