

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის მათემატიკის მიმართულების სტუდენტის

ვალერი ბერიკაშვილის

სტუდენტური პროექტი

„წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეები“

ხელმძღვანელი - ფიზიკა-მათემატიკის

მეცნიერებათა დოქტორი

პროფესორი *ვახტანგ კვარაცხელია*

თბილისი, 2013 წელი

სარჩევი

0. ანოტაცია	3
1. ტოპოლოგია. ჰაუსდორფის სივრცე. მიმართულება და ზადე.	4
2. ზღვარიანი წერტილები და კომპაქტური სივრცეები.	8
3. თვლადობა და მეტრიკული სივრცეები.	13
4. გამოყენებული ლიტერატურა.	20

0. ანოტაცია

პროექტში განხილული და შესწავლილია ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცეები, მათი ის თვისებები, რომელთა ცოდნა აუცილებელია ასეთ სივრცეებში ალბათური ზომების მოცემისა და დახასიათებისათვის.

საკვანძო სიტყვები: ტოპოლოგიური სივრცე; ღია სიმრავლე; ჩაკეტილი სიმრავლე; მიდამო; ბადე; კომპაქტური სიმრავლე

1. ტოპოლოგია. ჰაუსდორფის სივრცე. მიმართულება და ბადე

რაიმე Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{O}$ კლასს ეწოდება ღია სიმრავლეთა კლასი, ანუ ტოპოლოგია, თუ ის ჩაკეტილია ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი გაერთიანებისა და სასრული თანაკვეთის მიმართ, და ასევე მოიცავს $\emptyset$ და Ω სიმრავლეებს. ღია სიმრავლეების დამატებათა დუალურ კლასს წარმოადგენს ჩაკეტილი სიმრავლეების კლასი, რომელიც ჩაკეტილია მასში შემავალ სიმრავლეთა ნებისმიერი თანაკვეთისა და სასრული გაერთიანების მიმართ.

საზოგადოდ $(X, \mathcal{O})$ ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება X სიმრავლეს (სივრცეს), რომელზეც მოცემულია რაიმე $\mathcal{O}$ ტოპოლოგია. ქვემოთ განხილული ყველა სივრცე არის ტოპოლოგიური, ამიტომ ხშირად არ გამოვიყენებთ აღნიშვნას „ $\mathcal{O}$ “.

ტოპოლოგიური ქვესივრცე $(A, \mathcal{O}_A)$ არის ისეთი A სიმრავლე, რომელზეც განხილულია ინდუცირებული $\mathcal{O}_A$ ტოპოლოგია, რომელიც შედგება ყველა ღია სიმრავლის A სიმრავლესთან თანაკვეთისგან და რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს ტოპოლოგიას A -ში. ჩვენ შეგვიძლია A სიმრავლეს ორნაირად შევხედოთ: როგორც $(X, \mathcal{O})$ სივრცის ქვესიმრავლეს, ან როგორც $(X, \mathcal{O})$ სივრცის ქვესივრცეს. ორივე ეს შემთხვევა ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

ნებისმიერ A სიმრავლეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ შემდეგი სიმრავლეები: A^0 და $\bar{A}$. A სიმრავლის ღია გული ეწოდება ისეთ A^0 სიმრავლეს, რომელიც A -ს ღია ქვესიმრავლეთა შორის უდიდესია, ე.ი. ის არის A -ში შემავალი ყველა ღია სიმრავლეთა გაერთიანების ტოლი. თუ A ღია სიმრავლეა, მაშინ ცხადია $A^0 = A$.

A სიმრავლის $\bar{A}$ ჩაკეტვა არის უმცირესი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც მოიცავს A -ს, ანუ ის წარმოადგენს A სიმრავლის მომცველ ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა თანაკვეთას. თუ A ჩაკეტილია, მაშინ ცხადია, $A = \bar{A}$.

ადვილი შესამოწმებელია A სიმრავლის ღია გულსა და ჩაკეტვას შორის შემდეგი თანაფარდობების სამართლიანობა: $(A^0)^c = \bar{A}^c$ და $(A^c)^0 = (\bar{A})^c$.

ტოპოლოგიურ სივრცეებში სიმრავლეებსა და წერტილებს შორის თანაფარდობა აღიწერება მიდამოების ტერმინებში. ყოველი სიმრავლე, რომელიც მოიცავს არაცარიელ ღია სიმრავლეს, წარმოადგენს ამ ღია სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილის მიდამოს. x წერტილის მიდამო აღვნიშნოთ V_x -ით. A სიმრავლის x წერტილს ეწოდება A -ს შიგა წერტილი, თუ არსებობს x -ის ისეთი V_x მიდამო, რომელიც მთლიანად შედის A სიმრავლეში, ანუ $V_x \subset A$. ცხადია, A სიმრავლის A^0 ღია გულის ყოველი წერტილი, წარმოადგენს A სიმრავლის შიგა წერტილს.

$\bar{A}$ სიმრავლის წერტილებს შეხების წერტილებს უწოდებენ. ცხადია, ყოველი $x \in A$ წერტილი წარმოადგენს A სიმრავლის შეხების წერტილს, ხოლო, თუ $x \notin A$, მაშინ x წერტილს ეწოდება A სიმ-

რავლის შეხების წერტილი, თუ x -ის ნებისმიერი V_x მიდამოს თანაკვეთა A -სთან არაცარიელია, ე.ი. $x \notin (A^c)^0 = (\bar{A})^c$.

კლასიკურ ანალიზში უმთავრესად სწავლობენ უწყვეტ ფუნქციებს, რომლებიც ევკლიდეს რიცხვით წრფეს ასახავს ევკლიდეს რიცხვით წრფეში. საზოგადოდ, X ფუნქცია, რომელიც Ω ტოპოლოგიურ სივრცეს გადასახავს X ტოპოლოგიურ სივრცეში, უწყვეტია $\omega \in \Omega$ წერტილში, თუ $x = X(\omega)$ წერტილის ნებისმიერი მიდამოს წინასახე წარმოადგენს ω წერტილის მიდამოს. X ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (Ω -ზე) თუ იგი უწყვეტია ნებისმიერ $\omega \in \Omega$ წერტილში. რადგან წინასახეზე გადასვლით ნარჩუნდება ყველა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაცია, ცხადია საკმარისია შემოვიფარგლოთ მხოლოდ ღია (ან ჩაკეტილი) სიმრავლეებით. აქედან გამომდინარე, X უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი ღია (ჩაკეტილ) სიმრავლის წინასახე არის ღია (ჩაკეტილი) სიმრავლე. ამიტომ უწყვეტი ფუნქცია წარმოშობს ტოპოლოგიას განსაზღვრის არეში (ე.ი. გვამღევს უფრო „უბეშ“ ან იგივე ტოპოლოგიას). როგორც ვიცით, ფუნქცია ზომადია, თუ მისი შექცეული ფუნქცია ზომად სიმრავლეებს გადაიყვანს ზომად სიმრავლეებში. თუ ტოპოლოგიურ სივრცეში ზომადი სიმრავლეების σ -ალგებრად აღებულია მინიმალური σ -ალგებრა, რომელიც მოიცავს შესაბამის ტოპოლოგიას, მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ უწყვეტი ფუნქციები ზომადია. უწყვეტობის ცნების მნიშვნელობას ხაზს უსვამს ის გარემოებაც, რომ ორი სივრცე X და X' „ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურია“ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც X და X' -ს შორის არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა უწყვეტი გადასახვა X , რომლის შექცეული X^{-1} ასევე უწყვეტია.

რიცხვითი მიმდევრობის ზღვრის ცნება ის ძირითადი ცნებაა, რომელიც კლასიკური ალგებრიდან გამოყოფს კლასიკურ ანალიზს. ტოპოლოგიურ სივრცეში x_n მიმდევრობის ზღვარია x წერტილი, ანუ x_n მიმდევრობა მიისწრაფვის x წერტილისკენ, თუ ყოველი V_x მიდამოსთვის მოიძებნება ისეთი ნომერი $n(V_x)$, რომ $x_n \in V_x$ ნებისმიერი $n \geq n(V_x)$ -სათვის.

ვთქვათ, მოცემულია არაცარიელ წერტილთა რაიმე სიმრავლე $T = \{t\}$. ჩვენ ვიტყვით, რომ T სიმრავლე არის ნაწილობრივ დალაგებული, თუ მასში განსაზღვრულია დალაგების ოპერაცია. დალაგების ოპერაცია „ $<$ “ წარმოადგენს ბინარულ ოპერაციას, რომელიც ტრანზიტულია (პირობებიდან $t < t'$ და $t' < t''$, გამომდინარეობს $t < t''$), რეფლექსურია ($t < t$) და ანტისიმეტრიულია (თუ $t < t'$ და $t' < t$, მაშინ $t = t'$). ამრიგად, T სიმრავლეს ეწოდება ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე, თუ მისი რომელიმე ელემენტებისათვის განსაზღვრულია დალაგების ოპერაცია „ $<$ “.

T სიმრავლეს ეწოდება მიმართულება (ან მიმართული სიმრავლე), თუ ის ნაწილობრივ დალაგებულია და თუ ნებისმიერი ორი t და t' წერტილისათვის ამ სიმრავლიდან არსებობს t'' წერტილი ისეთი, რომ $t < t''$ და $t' < t''$.

T სიმრავლეს ეწოდება წრფივად (სავსებით) დალაგებული, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი წერტილი არის ერთმანეთის სადარი (ანუ, თუ $t, t' \in T$, მაშინ $t < t'$ ან $t' < t$).

მაგალითად, რაიმე სიმრავლის ქვესიმრავლეები ქმნიან ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლეს ჩართვის ოპერაციის მიმართ; რაიმე x წერტილის ყველა მიდამოს ერთობლიობა ქმნის მიმართულებას; რიცხვითი სიმრავლეები წრფივად დალაგებულია $\leq$ ოპერაციის მიმართ და ა.შ.

ფუნქცია X , რომელიც T სიმრავლეს გადასახავს X -ში, შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს თავისი ე.წ. „მონიშნული მნიშვნელობებით“ $\{x_t\}$ (ანუ წყვილთა შემდეგი სიმრავლის სახით $(X(t), t)$), რომლის ელემენტებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან t ინდექსებით. თუ T მიმართულებას, მაშინ $\{x_t\}$ მიმართული სიმრავლეა (ზოგჯერ გამოიყენება უფრო მოხერხებული ტერმინი - „ზადე“); ასეთი მიმართული სიმრავლეების კერძო შემთხვევაა $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც წარმოადგენს (წრფივად დალაგებულ) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციას.

x წერტილი წარმოადგენს x_t ზადის ზღვარს (და ეს ასე ჩაიწერება $x = \lim x_t$) ანუ, რაც იგივეა, x_t იკრიბება x -სკენ (და ეს ასე ჩაიწერება $x_t \rightarrow x$), თუ x -ის ყოველი V_x მიდამოსათვის არსებობს ისეთი ინდექსი $t(V_x)$, რომ ყველა ისეთი t' ინდექსისათვის, რომლისთვისაც $t' > t(V_x)$, სრულდება პირობა $x_{t'} \in V_x$. ეს ცნება სასარგებლოა მხოლოდ მაშინ, თუ ზღვარი, მისი არსებობის შემთხვევაში, ერთადერთია; ამ მოთხოვნას მივყავართ „განცალევის“, ანუ სივრცეთა ჰაუსდორფობის ცნებამდე.

განცალევის თეორემა. შემდეგი სამი განსაზღვრება ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ჰაუსდორფის, თუ

(S_1) ყოველ ზადეს გააჩნია არაუმეტეს ერთი ზღვარი;

(S_2) განსხვავებულ წერტილთა ყოველ წყვილს გააჩნია თანაუკვეთი მიდამოები;

(S_3) წერტილის ყველა ჩაკეტილი მიდამოების თანაკვეთა ემთხვევა თვით ამ წერტილს.

ტერმინს „განცალევა“ ასახავს დებულება (S_2).

შევნიშნოთ, რომ (S_3)-ის თანახმად ჰაუსდორფის სივრცის ნებისმიერი ერთი წერტილისგან შემდგარი სიმრავლე ჩაკეტილია.

დამტკიცება. (S_1) და (S_2) ეკვივალენტურია. ჯერ ვაჩვენოთ (S_2) $\Rightarrow$ (S_1). მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, (x_t) ზადეს გააჩნია ორი ზღვარი, x და y , $x \neq y$. ვთქვათ V_x და V_y არიან შესაბამისად x და y -ის ნებისმიერი მიდამოები. რადგან $x_t \rightarrow x$ და $x_t \rightarrow y$, მაშინ $x_t \in V_x \cap V_y$ ყველა იმ t -ებისათვის, რომლებიც მდებარეობენ როგორც $t(V_x)$ -ის, ასევე $t(V_y)$ -ის შემდეგ; ასეთი t -ები არსებობს, რადგან T წარმოადგენს მიმართულებას. ამრიგად, ყოველ V_x და V_y წყვილს აქვს არაცარიელი თანაკვეთა. დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება, ანუ (S_1) $\Rightarrow$ (S_2). ვთქვათ, $x \neq y$ და ვთქვათ, მათი მიდამოების ყოველ V_x და V_y წყვილს გააჩნია არაცარიელი თანაკვეთა. მაშინ არსებობს წერტილები $z(V_x, V_y) \in V_x \cap V_y$. რადგან (V_x, V_y) წყვილები ქმნიან მიმართულებას, დალაგებულს შემდეგი თანაფარდობით $(V_x, V_y) < (V'_x, V'_y)$, თუ $V_x \supset V'_x$ და $V_y \supset V'_y$, მაშინ ეს წერტილები ქმნიან ზადეს, რომელიც იკრიბება ერთდროულად x და y -საკენ, რაც ეწინააღმდეგება (S_1)-ს.

(S_2) და (S_3) ეკვივალენტურია. მართლაც, თუ ყოველი $y \neq x$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი მიდამო V_x , რომ $y \notin \bar{V}_x$, მაშინ ყველა $\bar{V}_x$ -ის თანაკვეთა ემთხვევა x -ს. პირიქით, თუ ყველა $\bar{V}_x$ -ის თანაკვეთა არის ერთი x წერტილისაგან შემდგარი სიმრავლე, მაშინ ყოველი $y \neq x$ -სთვის არსებობს ისეთი V_x , რომ $y \notin \bar{V}_x$. ამიტომ ღია სიმრავლე $(\bar{V}_x)^c$ წარმოადგენს y -ის ისეთ მიდამოს, რომელიც თანაკვეთია V_x -თან. ამით დამტკიცება დასრულებულია.

2. ზღვართი წერტილები და კომპაქტური სივრცეები

ამა თუ იმ ცნების ან თვისების ანალიზს, ჩვეულებრივ, მივყავართ მათ უფრო „სუსტ“ ვარიანტებთან. თვისება R უფრო სუსტია R' თვისებასთან შედარებით, თუ R' -დან გამომდინარეობს R ; ამ შემთხვევაში R წარმოადგენს R' -ის აუცილებელ პირობას, ხოლო R' კი საკმარის პირობას R -ისთვის.

ზღვართი წერტილის ცნება უფრო სუსტი ცნებაა ვიდრე ზღვრის ცნება. წერტილი x წარმოადგენს x_t ბადის ზღვართი წერტილს, თუ თითოეული t, V_x წყვილისთვის მოიძებნება ისეთი $t' > t$, რომ $x_{t'} \in V_x$. ქვემოთ მოყვანილ წინადადებაში ზღვრისა და ზღვართი წერტილის განსაზღვრებიდან პირდაპირ მიიღება დებულებები (I) და (II), ხოლო მათგან კი გამომდინარეობს დებულება (III).

წინადადება 1. ვთქვათ A_t სიმრავლე შედგება ყველა ისეთი $x_{t'}$ წერტილისგან, რომელთათვისაც $t' > t$: $A_t = \{x_{t'}, t' > t\}$

(I) $x_t \rightarrow x$ მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყოველი V_x -თვის არსებობს $A_t \subset V_x$.

(II) x წარმოადგენს $\{x_t\}$ -ს ზღვართი წერტილს მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნებისმიერი ორი სიმრავლე A_t და V_x თანაკვეთება.

(III) $\{x_t\}$ -ს ყველა ზღვართი წერტილების სიმრავლე ემთხვევა ყველა $\bar{A}_t$ -ის თანაკვეთას; თუ $x_t \rightarrow x$, მაშინ ეს სიმრავლე შედგება მხოლოდ x წერტილისაგან.

$\{x_t\}$ ბადის ყოველი ზღვართი წერტილი $\{x_t\}$ -ს რაიმე ქვესიმრავლის ზღვარია, სადაც ქვესიმრავლე გვესმის შემდეგი აზრით. $s, s', \dots$ ელემენტებისგან შემდგარ S მიმართულებას ეწოდება T მიმართულების ქვემიმართულება, თუ არსებობს ფუნქცია f , რომელიც S -ს ასახავს T -ში და გააჩნია შემდეგი თვისებები: თითოეული t -სთვის არსებობს ისეთი s , რომ s -ის ყველა მომდევნო s' -სათვის, ელემენტი $t' = f(s')$ არის t -ს მომდევნო ელემენტი. სიმრავლეს $\{x_{f(s)}\}$ -ს, დალაგებულს T მიმართულების S ქვემიმართულების მიხედვით, ეწოდება $\{x_t\}$ ბადის ქვებადე; შესაბამის კლასიკურ ცნებას წარმოადგენს ქვემიმდევრობის ცნება. ცხადია, თუ $x_t \rightarrow x$, მაშინ ყოველი ქვებადისთვის $x_{f(s)} \rightarrow x$.

წინადადება 2. x წერტილი წარმოადგენს $\{x_t\}$ ბადის ზღვართი წერტილს მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ამ სიმრავლის x წერტილისკენ კრებადი ქვებადე.

დამტკიცება. საკმარისობას ვღებულობთ პირდაპირ განსაზღვრებიდან. აუცილებლობის დასაბუთებისთვის შეიძლება თითოეული $s = (t, V_x)$ წყვილისთვის ავიღოთ ისეთი $f(s') = t' > t$, რომ $x_{t'} \in V_x$ და დავალაგოთ წყვილები თანაფარდობით $(t_1, V_x^1) > (t_2, V_x^2)$ თუ $t_1 > t_2$ და $V_x^1 \subset V_x^2$.

კომპაქტური სივრცე ეწოდება ჰაუსდორფის სივრცეს, რომელშიც ყოველ ბადეს გააჩნია ერთი მაინც ზღვართი წერტილი; სიმრავლეს ეწოდება კომპაქტური, თუ ის კომპაქტურია მასში ინდუცი-

რებული ტოპოლოგიის მიმართ. კომპაქტურობა ანალიზში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს, ამიტომ მნიშვნელოვანია გვეჩვენოს სივრცის კომპაქტურობის სხვა ეკვივალენტური განსაზღვრებები. ჩვენ არაერთხელ გამოვიყენებთ შემდეგ ტერმინოლოგიას: ღია ქვესიმრავლეების ქვეკლასს ეწოდება რაიმე სიმრავლის ღია დაფარვა, თუ ამ სიმრავლის თითოეული წერტილი ეკუთვნის ამ ქვეკლასის ერთ სიმრავლეს მაინც.

თეორემა კომპაქტურობის შესახებ. ჰაუსდორფის სივრცის შემდეგი სამი თვისება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

(K_1) **ბოლცანო-ვაიერშტრასის თვისება:** ყოველ ბადეს გააჩნია ერთი ზღვარითი წერტილი მაინც.

(K_2) **ჰაინე-ბორელის თვისება:** სივრცის ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს ამ სივრცის სასრულ ქვედაფარვას.

(K_3) **თანაკვეთის თვისება:** ჩაკეტილ სიმრავლეთა ყოველ კლასს, რომლის ნებისმიერ სასრულ ქვეკლასს გააჩნია არაცარიელი თანაკვეთა, აქვს არაცარიელი თანაკვეთა.

თუ რომელიმე კლასი (K_3)-ში აღწერილი თვისების მატარებელია, მას ჩვენ ვუწოდებთ ცენტრირებულ კლასს.

დამტკიცება. თანაკვეთის თვისება ეკვივალენტურია შემდეგი თვისების: ჩაკეტილ სიმრავლეთა ყოველი კლასი ცარიელი თანაკვეთით, შეიცავს ცარიელი თანაკვეთის მქონე სასრულ ქვეკლასს. მაშასადამე, ის ჰაინე-ბორელის თვისების დუალურია და ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ მისი ეკვივალენტურობა ბოლცანო-ვაიერშტრასის თვისებასთან.

ვთქვათ $\{x_t\}$ არის ბადე. თითოეული $t_0 \in T$ -სთვის განვიხილოთ ყველა იმ x_t -ების ჩაკეტვა, რომელთათვისაც $t > t_0$. რადგან T მიმართულებას, ამიტომ ეს ჩაკეტვები ქმნიან ჩაკეტილ სიმრავლეთა ცენტრირებულ კლასს. ამრიგად, თუ თანაკვეთის თვისება შესრულებულია, მაშინ არსებობს ისეთი x , რომელიც ყველა ჩაკეტვას ეკუთვნის. აქედან გამომდინარეობს, რომ x არის x_t -ს ზღვარითი წერტილი.

პირიქით, განვიხილოთ ჩაკეტილი სიმრავლეების ცენტრირებული კლასი და მას დავუმატოთ ყველა სასრული თანაკვეთა. ასეთი გზით მიღებული კლასი წარმოადგენს მიმართულებას (თუ მას დავალაგებთ თეორიულ-სიმრავლური ჩართვის ოპერაციის მიმართ), ამიტომ, თუ ავარჩევთ ამ კლასის თითოეული სიმრავლიდან თითო წერტილს, მივიღებთ მიმართულ სიმრავლეს. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თვისების თანახმად, ამ სიმრავლეს გააჩნია ზღვარითი წერტილი და ეს წერტილი ეკუთვნის ამ კლასის ყოველ სიმრავლეს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თანაკვეთა არ არის ცარიელი, რაც ასრულებს დამტკიცებას.

ჩამოვყალიბოთ კომპაქტურობის რამდენიმე თვისება.

1⁰. კომპაქტურ სივრცეში $\{x_t\}$ ბადე კრებადია x -სკენ, $x_t \rightarrow x$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x წარმოადგენს მის ერთადერთ ზღვართი წერტილს.

დამტკიცება. დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ წინადადება 1-ის დებულებები. აუცილებლობა შესრულებულია წინადადება 1-ის დებულება III-ის ძალით. საკმარისობის ჩვენება ხდება შემდეგნაირად, თუ $x_t \nrightarrow x$, მაშინ წინადადება 1-ის დებულება I-ის ძალით არსებობს ისეთი V_x , რომ ყველა A_t -ს V_x^c -სთან აქვს არაცარიელი თანაკვეთა, ე.ი. თითოეული t -სთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $t' > t$, რომ $x_{t'} \in A_t \cap V_x^c$. რადგან სივრცე კომპაქტურია, მაშინ ქვებადეს $\{x_{t'}\}$ -ს, ხოლო წინადადება 2-ის ძალით ბადე $\{x_t\}$ -საც, გააჩნიათ ზღვართი წერტილი $x' \in V_x^c$. ამრიგად, $x \neq x'$ და x არ შეიძლება იყოს $\{x_t\}$ -ს ერთადერთი ზღვართი წერტილი.

2⁰. კომპაქტური სიმრავლე ჩაკეტილია. კომპაქტურ სივრცეში სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც.

დამტკიცება. ვთქვათ, A კომპაქტურია და ვთქვათ, $V_x, V_y(x)$ არის, შესაბამისად, $x \in A$ და $y \in A^c$ წერტილების თანაუკვეთი ღია მიდამოების წყვილი. ჰაინე-ბორელის თვისების თანახმად, A სიმრავლის ღია $\{V_x\}$ დაფარვა (x გაირბენს მთელ A სიმრავლეს), შეიცავს სასრულ ქვედაფარვას $\{V_{x_k}\}$, ხოლო არათანაუკვეთი ღია სიმრავლეები $V = \bigcup_k V_{x_k}, V' = \bigcap_k V_y(x_k)$ ისეთებია, რომ $A \subset V$ და $y \in V'$. ამრიგად, y წერტილის ღია მიდამო V' არ შეიცავს A -ს წერტილებს, ამიტომ $y \notin \bar{A}$. რადგან $y \in A^c$ არის ნებისმიერი წერტილი, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ A^c და $\bar{A}$ -ს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი. დებულების პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. მეორე ნაწილი გამომდინარეობს თანაკვეთის თვისებიდან.

3⁰. არაზრდადი არაცარიელი კომპაქტური სიმრავლეების მიმდევრობის თანაკვეთა ცარიელი არ არის.

დასამტკიცებლად საჭიროა თანაკვეთის თვისების გამოყენება.

4⁰. თუ უწყვეტი ფუნქციის განსაზღვრის არე კომპაქტური სიმრავლეა, მაშინ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეც კომპაქტურია.

დამტკიცება. ფუნქციის უწყვეტობის გამო, მნიშვნელობათა სიმრავლის ყოველი ღია დაფარვის წინასახე წარმოადგენს განსაზღვრის არის ღია დაფარვას, რომელიც, კომპაქტურობის გამო, შეიცავს სასრულ ქვედაფარვას. ეს უკანასკნელი კი, ცხადია, წარმოადგენს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის სასრული ქვედაფარვის წინასახეს. ამრიგად, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს გააჩნია ჰაინე-ბორელის თვისება, რაც ასრულებს ამ თვისების დამტკიცებას.

ევკლიდეს წრფე $R = (-\infty; +\infty)$ არაკომპაქტურია. ბოლცანო-ვაიერშტრასისა და ჰაინე-ბორელის თეორემების ძალით, ყოველი ჩაკეტილი სეგმენტი $[a, b]$ კომპაქტურია. ეს თეორემები სამართლიანია მთელი წრფისათვის იმ შემთხვევაში, თუ მას „გავაფართოვებთ“, ანუ დავამატებთ წერტილებს $-\infty$ და $+\infty$. გაფართოვებული ევკლიდეს წრფე $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ კომპაქტურია. უფრო მეტიც, R

ლოკალურად კომპაქტურია და როგორც ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ, თითოეული ლოკალურად კომპაქტური სივრცე შეიძლება გავხადოთ კომპაქტური, თუ მას მხოლოდ ერთ წერტილს დავუმატებთ.

ჰაუსდორფის სივრცეს ეწოდება ლოკალურად კომპაქტური, თუ მის ყოველ წერტილს გააჩნია კომპაქტური მიდამო.

5⁰. ლოკალურად კომპაქტურ სივრცეში ყოველი მიდამო შეიცავს კომპაქტურ მიდამოს.

დამტკიცება. ვთქვათ, X არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე და $x \in X$ არის მისი ნებისმიერი წერტილი. განვიხილოთ x -ის რაიმე მიდამო U_x . ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ ის შეიცავს x -ის კომპაქტურ მიდამოს. მართლაც, განსაზღვრების ძალით x -ს გააჩნია კომპაქტური მიდამო C_x . რადგან U_x და C_x ორივე x -ის მიდამოა, ამიტომ, ცხადია, $V_x = U_x C_x \neq \emptyset$ და V_x -იც აგრეთვე არის x -ის მიდამო. ვთქვათ, $W = C_x \setminus V_x^0$, სადაც V_x^0 აღნიშნავს V_x -ის გულს. რადგან თვისება 2⁰-ის ძალით C_x ჩაკეტილია, ამიტომ W -ც ჩაკეტილია. განვიხილოთ x -ის ყველა ჩაკეტილი მიდამო $F_x^\alpha, \alpha \in I$, სადაც I ინდექსთა სიმრავლეა. ცხადია, $\bigcap_{\alpha \in I} F_x^\alpha$ და W - თანაუკვეთი სიმრავლეებია, რადგან, როგორც ვიცით, $\bigcap_{\alpha \in I} F_x^\alpha = \{x\}$. ახლა F_x^α სიმრავლეების ნაცვლად განვიხილოთ სიმრავლეები $G_x^\alpha = F_x^\alpha \cap C_x$. ცხადია, ყოველი $\alpha \in I$ -სათვის G_x^α წარმოადგენს x -ის ჩაკეტილ მიდამოს. უფრო მეტიც, რადგან $G_x^\alpha \subset C_x$, ამიტომ G_x^α არის კომპაქტური სიმრავლე. ამრიგად, სიმრავლეები W და $G_x^\alpha, \alpha \in I$, არიან კომპაქტური C_x სიმრავლის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები, რომელთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა: $W \cap \bigcap_{\alpha \in I} G_x^\alpha = \emptyset$. მაშინ, კომპაქტურობის თეორემის (K_3) თანაკვეთის თვისების ძალით არსებობს ინდექსთა სასრული სიმრავლე $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ისეთი, რომ $W \cap \bigcap_{i=1}^n G_x^{\alpha_i} = \emptyset$. განვიხილოთ სიმრავლე $G_x = \bigcap_{i=1}^n G_x^{\alpha_i}$. რადგან თითოეული $G_x^{\alpha_i}$ არის x -ის კომპაქტური მიდამო, ამიტომ G_x -იც არის x -ის კომპაქტური მიდამო. გარდა ამისა, აგების თანახმად $G_x \subset C_x$ და $W \cap G_x = \emptyset$, ამიტომ $G_x \subset V_x \subset U_x$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

$(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ ჰაუსდორფის სივრცის ერთწერტილიანი გაფართოვება კომპაქტურ სივრცემდე ხორციელდება შემდეგნაირად. დავუმატოთ $\mathcal{X}$ -ის წერტილებს ნებისმიერი წერტილი $\infty \notin \mathcal{X}$ და ღია სიმრავლეებს დავუმატოთ ყველა ის სიმრავლე, რომლებიც მიიღებიან წერტილ ∞ -ზე ყველა იმ ღია სიმრავლეების მიერთებით, რომელთა დამატებაც კომპაქტურია. მიღებული ტოპოლოგიური სივრცე ასე აღვნიშნოთ $(\mathcal{X}_\infty, \mathcal{O}_\infty)$.

6⁰. ლოკალურად კომპაქტური, მაგრამ არაკომპაქტური სივრცის ერთწერტილიანი გაფართოვება კომპაქტურია. საწყის სივრცეში ამ გაფართოვებით ინდუცირებული ტოპოლოგია ემთხვევა სივრცის საწყის ტოპოლოგიას.

დამტკიცება. დებულების ბოლო ნაწილი უშუალოდ გამომდინარეობს $\mathcal{O}_\infty$ -ის განსაზღვრებიდან. დებულების პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ ეს ახალი სივრცე ჰაუსდორფისაა, რადგან საწყისი ჰაუსდორფის სივრცის ორი განსხვავებული წერტილი განცალკევებულია, ხოლო წერტილი ∞ კი შეიძლება განვაცალოთ ნებისმიერი $x \in \mathcal{X}$ წერტილისაგან, თუ ავიღებთ კომპაქტურ და, შესაბამისად, ჩაკეტილ მიდამოს $V_x \subset \mathcal{X}$, ისე რომ $\infty \in V_x^c$. გარდა ამისა, ახალ სივ-

რცეს გააჩნია ჰაინე-ბორელის თვისება, რადგან მისი ღია დაფარვა აუცილებლად შეიცავს წევრს $O + \{\infty\}$, რომლისთვისაც O^c კომპაქტურია; O^c სიმრავლის სასრული ქვედაფარვა, დამატებული $O + \{\infty\}$, იძლევა ახალი სივრცის სასრულ ქვედაფარვას.

3. თვლადობა და მეტრიკული სივრცეები.

ევკლიდეს წრფეს გააჩნია „თვლადობის“ ბევრი თვისება, რომელთა შორისაა სეპარაბელურობა (რაციონალური წერტილების ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლის არსებობა) და თვლადი ბაზისის არსებობა (ინტერვალთა თვლადი კლასი რაციონალური ბოლოებით); ეს თვისებები საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ ზღვრები მხოლოდ მიმდევრობების გამოყენებით. ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცეში A სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი B -ში, თუ $\bar{A} \supset B$; სხვა სიტყვებით, თუ $B = X$, მაშინ A მკვრივია X -ში, თუ ნებისმიერი მიდამო იკვეთება A -სთან. B სიმრავლეს ეწოდება სეპარაბელური, თუ არსებობს ისეთი თვლადი A სიმრავლე, რომელიც მკვრივია B -ში. x წერტილის თვლადი ბაზისი ეწოდება x წერტილის მიდამოთა ისეთ თვლად კლასს $\{V_x(i)\}$, რომ x წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს რომელიმე $V_x(i)$ -ს; სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზისი $\{V(i)\}$, თუ ყოველი x წერტილისათვის $V(i)$ მიდამოების რაიმე ქვეკლასი წარმოადგენს x წერტილის ბაზისს.

თეორემა 3.1. იმისათვის, რომ სივრცეს გააჩნდეს თვლადი ბაზისი, აუცილებელია, რომ ის იყოს სეპარაბელური და თითოეულ წერტილს ჰქონდეს თვლადი ბაზისი. მაშინ სივრცის ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს თვლად დაფარვას.

უწინარეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ თუ თვლადი $\{x_j\}$ სიმრავლე მკვრივია მეტრიკულ სივრცეში, მაშინ ყოველ x_j წერტილს გააჩნია თვლადი ბაზისი, შექმნილი რაციონალურ რადიუსიანი ბურთებით და ყველა ამ თვლადი ბაზისების თვლადი გაერთიანება წარმოადგენს ბაზისს სივრცეში.

დამტკიცება. თუ სივრცეს გააჩნია თვლადი $\{V(i)\}$ ბაზისი, მაშინ მას აქვს თვლადი ბაზისი თითოეულ წერტილში. უფრო მეტიც, ვთქვათ, A არის სიმრავლე, შედგენილი იმ x_j წერტილებისგან, რომლებიც არჩეულია თითოეული $V(i)$ -დან; მაშინ ნებისმიერი მიდამო იკვეთება A -სთან, რადგან ნებისმიერი წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს რომელიღაც $V(i)$ -ს და, შესაბამისად, შეიცავს x_j -საც. და ბოლოს, თუ მოცემულია სივრცის ღია დაფარვა, მაშინ ყოველი სიმრავლე ამ დაფარვიდან შეიცავს რომელიმე $V(i)$ -ს; ყოველი $V(i)$ მიდამოსათვის ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ მისი მომცველი O_j სიმრავლე დაფარვიდან. თვლადი კლასი (O_j) წარმოადგენს სივრცის ღია დაფარვას, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თვლადი ბაზის მქონე სივრცის ძირითად მაგალითს მეტრიკული სივრცე წარმოადგენს. ევკლიდეს სივრცეებში ტოპოლოგია განისაზღვრება მანძილის საშუალებით; საზოგადოდ, ასეთი მიდგომა დამახასიათებელია მეტრიკული სივრცეებისთვის. **მეტრიკული სივრცე** არის სივრცე, მასში განსაზღვრული d მანძილით (მეტრიკით), რომელიც $X \times X$ -ს გადასახავს R -ში და ნებისმიერი x, y, z წერტილებისათვის ეს ფუნქცია შემდეგ თვისებებს აკმაყოფილებს:

ა) $d(x, y) \geq 0$ და $d(x, y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = y$;

ბ) $d(x, y) = d(y, x)$ ყოველი $x, y \in X$ -სათვის (სიმეტრიულობის თვისება);

გ) $d(x, y) + d(x, z) \geq d(y, z)$ ყოველი $x, y, z \in \mathcal{X}$ -სათვის (სამკუთხედის აქსიომა).

რაიმე სივრცეში განსაზღვრული ფუნქცია d შესაძლოა აკმაყოფილებდეს ყველა ზემოთ ჩამოთვლილ თვისებას, გარდა თვისებისა

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

ამ შემთხვევაში, ჩვეულებრივ, ვაიგივებთ ყველა იმ x, y წერტილებს, რომელთათვისაც $d(x, y) = 0$; საწყისი სივრცე იცვლება ამ გზით მიღებული „ეკვივალენტობის კლასების“ სივრცით, რომელიც წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს d მეტრიკით.

$(\mathcal{X}, d)$ მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგია განისაზღვრება შემდეგნაირად: ვთქვათ, $V_x(r)$ არის $r (> 0)$ რადიუსიანი **ბურთი** ცენტრით x წერტილში, ანუ

$$V_x(r) = \{y, y \in \mathcal{X}: d(x, y) < r\}.$$

ნებისმიერ $A \subset \mathcal{X}$ სიმრავლეს ეწოდება **ღია სიმრავლე**, თუ ყოველი $x \in A$ -სათვის არსებობს ბურთი $V_x(r)$ შემდეგი თვისებით $V_x(r) \subset A$; სამკუთხედის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ყველა ბურთი ღიაა. ცხადია, ასე განსაზღვრული ღია სიმრავლეების კლასი ქმნის ტოპოლოგიას. რადგან $d(x, y) > 0$ როცა $x \neq y$, ხოლო სამკუთხედის თვისების ძალით $V_x(r)$ და $V_y(s)$ -ს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი, როცა $0 < r, s \leq \frac{1}{2}d(x, y)$; ამიტომ ზემოთ განსაზღვრული მეტრიკული ტოპოლოგიური სივრცე წარმოადგენს ჰაუსდორფის სივრცეს. შევნიშნოთ, რომ პირობა $x_n \rightarrow x$ ეკვივალენტურია პირობის $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

მეტრიკული ტოპოლოგიის ძირითადი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ ყოველ x წერტილს გააჩნია თვლადი ბაზისი. ასეთ ბაზისად შეიძლება ავიღოთ $V_x(1/n)$, $n = 1, 2, \dots$. ამიტომ, ბუნებრივია მეტრიკული სივრცის თვისებები ჩამოყალიბდეს მიმდევრობების ტერმინებში.

დავატყვიცოთ შემდეგი თვისებები:

1. ყოველ მიმდევრობას აქვს არა უმეტეს ერთი ზღვარი.
2. წერტილი $x \in \bar{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A -ში მოიძებნება მიმდევრობა $\{x_n\}$ ისეთი, რომ $x_n \rightarrow x$; ამიტომ, სიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მასვე ეკუთვნის ამ სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი მიმდევრობის ზღვარი.
3. ყოველი ჩაკეტილი (ღია) სიმრავლე არის ღია (ჩაკეტილი) სიმრავლეების თვლადი თანაკვეთა (გაერთიანება).
4. მეტრიკულ სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზისი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის სეპარაბელურია.
5. ვთქვათ, X არის ფუნქცია, რომელიც $(\Omega, \mathcal{d})$ მეტრიკულ სივრცეს გადასახავს $(\mathcal{X}, d)$ მეტრიკულ სივრცეში; ყოველი $\omega' \rightarrow \omega$ -სათვის შესრულდება პირობა $X(\omega') \rightarrow X(\omega)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X(\omega_n) \rightarrow X(\omega)$ ყოველი მიმდევრობისათვის $\omega_n \rightarrow \omega$.

დამტკიცება. პირველი დებულების დამტკიცება გამომდინარეობს განცალების თეორემიდან.

მეორე დებულების საკმარისობა ცხადია, ხოლო აუცილებლობის დასამტკიცებლად საჭიროა ავიღოთ $x_n \in A \cap V_x \left(\frac{1}{n}\right)$.

მესამე დებულების დასამტკიცებლად განვიხილოთ ღია სიმრავლეები: $O_n = \bigcup_{x \in A} V_x \left(\frac{1}{n}\right)$. ყოველი n -სათვის O_n სიმრავლე შეიცავს A -ს, ამიტომ $A \in O_n$. მეორეს მხრივ, ყოველი $x \in O_n$ -სათვის არსებობს ისეთი $x_n \in O_n$ წერტილი, რომ $x \in V_{x_n} \left(\frac{1}{n}\right)$, ამიტომ $x_n \rightarrow x$; რადგან A ჩაკეტილია, მეორე დებულების ძალით ვღებულობთ, რომ $x \in A$; შესაბამისად, $A \supset O_n$. ამრიგად, ჩაკეტილი სიმრავლე $A = \bigcap O_n$; დუალური დებულება მიიღება, თუ გადავალთ დამატებებზე.

მეოთხე დებულება გამომდინარეობს თეორემა 3.1-დან.

და ბოლოს, თუ $X(\omega') \rightarrow X(\omega)$ როცა $\omega' \rightarrow \omega$, მაშინ, ცხადია, $X(\omega_n) \rightarrow X(\omega)$ როცა $\omega_n \rightarrow \omega$. თუ $X(\omega') \nrightarrow X(\omega)$ როცა $\omega' \rightarrow \omega$, მაშინ არსებობს ისეთი $\omega_n \in V_\omega \left(\frac{1}{n}\right)$ წერტილები, რომ $X(\omega_n) \nrightarrow X(\omega)$ მაშინ, როცა $\omega_n \rightarrow \omega$; აქედან გამომდინარეობს მეხუთე დებულება.

მეტრიკული სივრცეების სისრულე და კომპაქტურობა

რიცხვითი მიმდევრობების კრებადობის ძირითადი კრიტერიუმია **ფუნდამენტური მიმდევრობების კრიტერიუმი (კოშის კრიტერიუმი)**: x_n მიმდევრობა კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ფუნდამენტურია, ანუ $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ მაშინ, როცა $m, n \rightarrow \infty$ -სკენ. თუ მეტრიკულ სივრცეში $x_n \rightarrow x$, მაშინ სამკუთხედის უტოლობიდან ვღებულობთ:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x, x_n) \rightarrow 0 \text{ როცა } m, n \rightarrow \infty\text{-სკენ.}$$

შევნიშნოთ, რომ საწინააღმდეგო დებულება ყოველთვის არ არის სწორი (მაგალითად შეიძლება გამოდგეს ყველა რაციონალურ რიცხვთა სივრცე ევკლიდეს მეტრიკით). სივრცეს ეწოდება **სრული**, თუ მასში სრულდება კოშის კრიტერიუმი, ანუ თუ $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ პირობის შესრულებიდან გამომდინარეობს, რომ x_n კრებადია რაიმე x წერტილისკენ. სრულ მეტრიკულ სივრცეებს გააჩნიათ მრავალი მნიშვნელოვანი თვისება, რომლებსაც ქვემოთ მოვიყვანთ.

დავარქვათ $\Delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ სიდიდეს A სიმრავლის დიამეტრი; თუ $\Delta(A)$ სასრულია, მაშინ A -ს ეწოდება შემოსაზღვრული.

კანტორის თეორემა. ვთქვათ, A_n არის სრულ მეტრიკულ სივრცეში არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლეების ნებისმიერი არაზრდადი მიმდევრობა, რომელთა დიამეტრი $\Delta(A_n)$ მიისწრაფვის ნულისაკენ როცა $n \rightarrow \infty$ -საკენ. მაშინ A_n სიმრავლეებს გააჩნიათ არაცარიელი თანაკვეთა, რომელიც შედგება მხოლოდ ერთი წერტილისაგან.

დამტკიცება. ავიღოთ $x_n \in A_n$ და $m \geq n$. პირობიდან $d(x_m, x_n) \leq \Delta(A_n) \rightarrow 0$ გამომდინარეობს, რომ x_n კრებადია რაიმე x წერტილისკენ. რადგან $x_m \in A_m \subset A_n$ ყველა $m \geq n$ -სათვის და A_n სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ x ეკუთვნის ყოველ A_n -ს. ამრიგად $x \in \cap A_n$. თუ $d(x, x') > 0$, მაშინ რომელიმე k -სათვის $d(x, x') > A_k$, ამიტომ $x' \notin A_k \supset \cap A_n$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

A -სიმრავლეს ეწოდება **არსად მკვრივი**, თუ მისი $\bar{A}$ ჩაკეტვის დამატება მკვრივია მთელ სივრცეში, ან რაც იგივეა, თუ $\bar{A}$ არ შეიცავს არავითარ სფეროს, ანუ თუ $\bar{A}$ -ის ღია გული ცარიელი სიმრავლეა. სიმრავლეს ეწოდება **პირველი კატეგორიის სიმრავლე**, თუ ის არის არსად მკვრივი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება. ხოლო სიმრავლეს ეწოდება მეორე კატეგორიის სიმრავლე, თუ ის არ არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე.

ბერის თეორემა კატეგორიების შესახებ. ყოველი სრული მეტრიკული სივრცე არის მეორე კატეგორიის სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ $A = \cup A_n$, სადაც A_n არსად მკვრივი სიმრავლეა. არსებობს წერტილი $x_1 \in \bar{A}$ და ისეთი დადებითი $r_1 < 1$, რომ $V_{x_1}(r_1)$ ბირთვის ჩაკეტვა არ თანაიკვეთება A_1 -თან. თუ ასე გავაგრძელებთ, ჩვენ ავაგებთ $V_{x_n}(r_n)$ ბირთვების ისეთ კლებად მიმდევრობას, რომ $\overline{V_{x_n}(r_n)}$ არ თანაიკვეთება A_n -თან და $r_n < \frac{1}{n} \rightarrow 0$. კანტორის თეორემის თანახმად არსებობს წერტილი $x \in \overline{V_{x_n}(r_n)}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x \notin \cup A_n$. ამრიგად, $A \neq \bar{A}$ და თეორემა დამტკიცებულია.

კომპაქტური მეტრიკული სივრცეების შესასწავლად ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი ორი წინადადება.

ა) თუ ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას, მაშინ სივრცე სრულია.

დებულება მტკიცდება შემდეგნაირად, თუ ფუნდამენტური x_n მიმდევრობა შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას, $x_{n'} \rightarrow x$, მაშინ სამკუთხედის უტოლობიდან ვღებულობთ $d(x_n, x) \leq d(x_{n'}, x_n) + d(x_{n'}, x) \rightarrow 0$, სადაც $n, n' \rightarrow \infty$, ანუ $x_n \rightarrow x$.

სიმრავლეს ეწოდება **სავსებით შემოსაზღვრული**, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის ის შეიძლება დაიფაროს სასრული რაოდენობის ბურთებით, რომელთა რადიუსები $\leq \varepsilon$. ცხადია, სავსებით შემოსაზღვრული სიმრავლე შემოსაზღვრულია და სავსებით შემოსაზღვრული სიმრავლის ქვესიმრავლეც სავსებით შემოსაზღვრულია.

ბ) მეტრიკული სივრცე სავსებით შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წერტილთა ყოველი მიმდევრობა შეიცავს ფუნდამენტურ ქვემიმდევრობას. სავსებით შემოსაზღვრულ მეტრიკულ სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზისი.

დამტკიცება. დავუშვათ სივრცე არ არის სავსებით შემოსაზღვრული. მაშინ იარსებებს ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ სივრცე ვერ დაიფარება სასრული რაოდენობის ბურთებით, რომელთა რადიუსები $\leq \varepsilon$.

ავარჩიოთ x_n წერტილთა ისეთი მიმდევრობა, რომელთა ყოველ წევრს შორის მანძილი $\geq \varepsilon$. თუკი იარსებებდა მხოლოდ სასრული რაოდენობა $x_1, x_2, \dots, x_m$ წერტილებისა ამ თვისებით, მაშინ ε -რადიუსის მქონე ბურთები ცენტრებით ამ წერტილებში დაფარავდა მთელ სივრცეს. ცხადია, ეს მიმდევრობა არ შეიძლება შეიცავდეს ფუნდამენტურ ქვემიმდევრობას.

პირიქით, ვთქვათ სივრცე სავსებით შემოსაზღვრულია. მაშინ მისი ნებისმიერი სიმრავლე სავსებით შემოსაზღვრულია. მაშინ რაიმე სიმრავლეში შემავალი წერტილების ნებისმიერი მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობა, რომელიც მთლიანად შევა ბურთში, რომლის რადიუსი $\leq \varepsilon$ და რომელიც, თავის მხრივ, წარმოადგენს ε -ზე ნაკლები ან ტოლი რადიუსიანი სასრული რაოდენობის დამფარავი ბურთებიდან ერთ-ერთს. ვთქვათ მოცემულია (x_n) მიმდევრობა; თუ მიმდევრობით დავუშვებთ, ნრომ $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, ჩვენ მივიღებთ ისეთ ქვემიმდევრობებს, რომელთაგან თითოეული შედის მის წინა ქვემიმდევრობაში და k -ური ქვემიმდევრობა, რომელიც შედგება ელემენტებისაგან $x_{1k}, x_{2k}, \dots$, ეკუთვნის ბურთს რადიუსით $\leq 1/k$. შევადგინოთ დიაგონალური ქვემიმდევრობა $\{x_{nn}\}$; ამ ქვემიმდევრობის ყველა სხვადასხვა ინდექსის მქონე წევრი, დაწყებული k -ური წევრიდან, ერთმანეთისაგან დაშორებულია მანძილით $\leq 1/k$. შესაბამისად, ეს მიმდევრობა ფუნდამენტურია.

თუ სივრცე სავსებით შემოსაზღვრულია, მაშინ კლასი შექმნილი ყველა იმ ბურთებით, რომლებიც შედიან სასრულ დაფარვაში რადიუსებით $\leq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, წარმოადგენს თვლად ბაზისს.

თეორემა მეტრიკული სივრცის კომპაქტურობის შესახებ. მეტრიკული სივრცის შემდეგი სამი თვისება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

(MK_1) წერტილთა ყოველი მიმდევრობა შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას.

(MK_2) სივრცის ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს ამ სივრცის სასრულ ქვედაფარვას.

(MK_3) სივრცე სავსებით შემოსაზღვრული და სრულია.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$(MK_2) \Rightarrow (MK_1) \Rightarrow (MK_3) \Rightarrow (MK_2)$$

$(MK_2) \Rightarrow (MK_1)$. ეს გამომდინარეობს კომპაქტურობის თეორემიდან.

$(MK_1) \Rightarrow (MK_3)$. დავუშვათ წერტილთა ყოველი მიმდევრობა შეიცავს კრებად (ესე იგი ფუნდამენტურ) ქვემიმდევრობას, მაშინ ა)-ს ძალით სივრცე სრულია, ხოლო ბ)-ს ძალით ის სავსებით შემოსაზღვრულია.

$(MK_3) \Rightarrow (MK_2)$. თეორემა 3.1 და ბ)-დან გამომდინარეობს, რომ სავსებით შემოსაზღვრული სივრცის ღია დაფარვა შეიცავს სივრცის თვლად $\{O_j\}$ დაფარვას. თუ O_j სიმრავლეების ვერანაირი

სასრული გაერთიანება ვერ ფარავს სივრცეს, მაშინ ყოველი n -სთვის არსებობს წერტილი $x_n \notin \bigcup_{j=1}^n O_j$, ხოლო $\mathcal{B}$ -ს ძალით ამ წერტილების მიმდევრობა შეიცავს ფუნდამენტურ ქვემიმდევრობას. იმ შემთხვევაში, როცა სავსებით შემოსაზღვრული სივრცე იმავდროულად სრულიცაა, ამ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარითი x წერტილი, რომელიც აუცილებლად ეკუთვნის რომელიმე O_{j_0} სიმრავლეს სივრცის თვლადი ღია დაფარვიდან. რადგან x წერტილი x_n მიმდევრობის ზღვარითი წერტილია, ამიტომ არსებობს ისეთი $n > j_0$, რომ $x_n \in O_{j_0} \subset \bigcup_{j=1}^n O_j$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამრიგად, რომ არსებობს სივრცის სასრული დაფარვა.

შედეგი 1. კომპაქტური მეტრიკული სივრცე შემოსაზღვრული და სეპარაბელურია.

შედეგი 2. უწყვეტი X ფუნქცია, რომელიც კომპაქტურ მეტრიკულ (Ω, ρ) სივრცეს გადასახავს $(\mathcal{X}, d)$ მეტრიკულ სივრცეში, თანაბრად უწყვეტია.

X -ს ეწოდება თანაბრად უწყვეტი, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, დამოკიდებული მხოლოდ ε -ზე, რომ $d(X(\omega), X(\omega')) < \varepsilon$, როცა $\rho(\omega, \omega') < \delta$.

დამტკიცება. დავუშვათ $\varepsilon > 0$, რადგან X უწყვეტია, ამიტომ ყოველი $\omega \in \Omega$ -სთვის არსებობს ისეთი δ_ω , რომ $d(X(\omega), X(\omega')) < \frac{\varepsilon}{2}$ როცა $\rho(\omega, \omega') < 2\delta_\omega$. რადგან ფუნქციის განსაზღვრის არე კომპაქტურია, ამიტომ ის შეიძლება დაიფაროს $V_{\omega_k}(\delta_{\omega_k})$, $k = 1, 2, \dots, n$ ბურთების სასრული რაოდენობით, ვთქვათ δ უმცირესია ამ ბურთების რადიუსებს შორის. ცხადია, ნებისმიერი ω წერტილი ეკუთვნის ერთ-ერთს ამ ბურთთაგან, მაგალითად $V_{\omega_k}(\delta_{\omega_k})$; თუ $\rho(\omega, \omega') < \delta$, მაშინ $\rho(\omega_k, \omega') < 2\delta_{\omega_k}$. აქედან, თუ $\rho(\omega, \omega') < \delta$, მაშინ სამკუთხედის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$d(X(\omega), X(\omega')) \leq d(X(\omega_k), X(\omega)) + d(X(\omega_k), X(\omega')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

შედეგი დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ არასრული მეტრიკული სივრცე $(\mathcal{X}, d)$ შეიძლება გავასრულოთ, ანუ შეიძლება ავაგოთ მანძილების შემნახავი ურთიერთცალსახა თანადობა ამ სივრცისა რომელიმე სრული მეტრიკული სივრცის რაიმე მკვრივ ქვესიმრავლესთან.

განვიხილოთ ფუნდამენტური მიმდევრობები

$$s = (x_1, x_2, \dots), \quad s' = (x'_1, x'_2, \dots), \dots$$

$\rho(s, s') = \lim d(x_n, x'_n)$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია არსებობს, სასრულია და აკმაყოფილებს სამკუთხედის აქსიომას. s და s' ჩავთვალოთ ეკვივალენტურად, თუ $\rho(s, s') = 0$; ის სიმეტრიული, ტრანზიტული და რეფლექსურია, შესაბამისად (S, ρ) სივრცის ყველა ასეთი ეკვივალენტობის კლასი წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს, რომელიც, ადვილი დასანახია, რომ სრულია. ურთიერთცალსახა თანადობა $\mathcal{X}$ -სა და $x \leftrightarrow (x, x, \dots)$ თანაფარდობით მოცემული „მუდმივებით წარმოქმნილი ყველა მიმდევრობების“ ეკვივალენტობის კლასის S' სიმრავლეს შორის, ინარჩუნებს მეტრი-

კას. უფრო მეტიც, S' მკვრივია S -ში. ამრიგად, S შეიძლება განხილული იქნეს, როგორც $\mathcal{X}$ სივრცის მინიმალური გასრულება.

4. გამოყენებული ლიტერატურა

1. M. Love. Probability Theory I. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1977, 425 p.
2. ე. წითლაძე. ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები. თსუ, თბილისი, 1964.
3. ფ. ხარშილაძე. ზოგადი ანალიზის საფუძვლები. თსუ, თბილისი, 1971, 336 გვ.