

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის მათემატიკის მიმართულება

სამაგისტრო ნაშრომი თემაზე:

"მესამე სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფის
დახასიათება ჯვარედინ-მოდულური
გაფართოებების საშუალებით"

ავტორი: ილია ნანობაშვილი

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი ნ.ინასარიძე

2013
თბილისი

წინამდებარე ნაშრომი ეხება ჰომოლოგიური ალგებრის ერთ–ერთ თანამედროვე საკითხს. 2009 წელს M.D.Staic-მა სტატიაში ("From 3-algebras to Δ -groups and Symmetric Cohomology", J.Algebra (4) 332 (2009), 1360–1378) მოგვცა სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფების განმარტება, რომელიც ნაკარნახევი იყო ტოპოლოგიური კონსტრუქციებიდან. ამით მან ფაქტიურად შექმნა ახალი ე.წ "სიმეტრიული კოჰომოლოგიის თეორია". ოდნავ მოგვიანებით მანვე სტატიაში "Symmetric cohomology of groups in low dimension" შეძლო სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფების დახასიათება დაბალ განზომილებებში. ჩვენს მიერ შესწავლილია მესამე სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფი, გარკვეული აზრით განზოგადებულია კლასიკური შედეგი, 3-ე სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფი დახასიათებულია ჯვარედინ–მოდულური გაფართოებების საშუალებით.

შესავალი

განვიხილოთ G ჯგუფი და G მოდული A . შემოვიღოთ აღნიშვნა $C^n(G, A) \equiv \{\sigma : G^n \rightarrow A\}$ სადაც σ არის ნებისმიერი სიმრავლური ასახვა და განვსაზღვროთ $\delta_n : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ შემდეგნაირად:

$$\delta_n(\sigma)(g_1 \dots g_{n+1}) = {}^{g_1} \sigma(g_2 \dots g_{n+1}) - \sigma(g_1 g_2 \dots g_{n+1}) + \dots + (-1)^n \sigma(g_1 \dots g_n g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \sigma(g_1 \dots g_n)$$

როგორც კლასიკური თეორიიდანაა ცნობილი ამ შემთხვევაში მიიღება კომპლექსი

$$C^* : C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} C^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

დიფერენციალით δ და მის n -ურ ჰომოლოგიის ჯგუფებს ეწოდება n -ური კოჰომოლოგიის ჯგუფი G -სი კოეფიციენტებით A -ში და აღინიშნება $H^n(G, A)$ -თი.

გარკვეული ტოპოლოგიური საკითხებიდან გამომდინარე საჭირო ხდება განვიხილოთ სიმეტრიული ჯგუფ Σ_{n+1} -ის ელემენტების მოქმედება $C^n(G, A)$ -ზე ნებისმიერი n -თვის განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \tau_1 \sigma(g_1 \dots g_n) &= -g_1 \sigma((g_1)^{-1}, g_1 g_2, g_3 \dots g_n) \\ \tau_i \sigma(g_1 \dots g_n) &= -\sigma(g_1 \dots g_{i-1} g_i, (g_i)^{-1}, g_i g_{i+1} + 1 \dots g_n) \text{ როცა } 1 < i < n \\ \tau_n \sigma(g_1 \dots g_n) &= -\sigma(g_1 \dots g_{n-1} g_n, (g_n)^{-1}) \end{aligned}$$

სადაც $\tau_i \in \Sigma_{n+1}$ და წარმოადგენს გარდაქმნას რომელიც ადგილს უცვლის i -ურ და $i+1$ -ე წევრებს. ნაჩვენებია, რომ ეს მოქმედება ცალსახად გრძელდება მთელ Σ_{n+1} -ზე და რომ მიღებული მოქმედება შეთანხმებულია δ -სთან. ამ მოქმედების მიმართ ინვარიანტული ელემენტები ქმნიან C^* -ს ქვეკომპლექს რომლის ჰომოლოგიის ჯგუფებს ეწოდებათ სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფები G -სი კოეფიციენტებით A -ში და აღინიშნება $HS^n(G, A)$ -თი (ანუ ფაქტიურად გვაქვს ახალი ე.წ სიმეტრიული კოჰომოლოგიის თეორია). ბუნებრივად განიმარტება $HS^n(G, A) \rightarrow H^n(G, A)$ ასახვა. ცხადია შესასწავლი ხდება დამოკიდებულება $HS^n(G, A)$ -სა და $H^n(G, A)$ -ს შორის. . 2009-წელს Mihai D. Staic-ის ავტორობით დაიბეჭდა სტატია "Symetric cohomology of groups in low dimension" სადაც დაწვრილებითაა განხილული $n = 2$ შემთხვევა. ნაჩვენებია, რომ ამ შემთხვევაში ასახვა $HS^2(G, A) \rightarrow H^2(G, A)$ ყოველთვის არის ინექცია და მიღებულია კლასიკური შედეგის მსგავსი შედეგი სიმეტრიული კოჰომოლოგიის შემთხვევაში. კერძოდ ცნობილია, რომ $H^2(G, A) \cong Ext^1(G, A)$ სადაც $Ext^1(G, A)$ არის A -ს G -თი გაფართოებების სიმრავლის გარკვეული ექვივალენტობის კლასები. ზემოაღნიშნულ სტატიაში ნაჩვენებია, რომ სიმეტრიული კოჰომოლოგიის შემთხვევაშიც ადგილი აქვს ანალოგიურ ფაქტს $HS^2(G, A) \cong \underbrace{Ext^1(G, A)}_{\text{სადაც } Ext^1(G, A) \subset Ext^1(G, A)}$. ასევე იმავე სტატიაში დადგენილია ის პირობები რა პირობებშიც $HS^n(G, A) \rightarrow H^n(G, A)$ ბუნებრივი ასახვა არის ინექცია. უფრო კონკრეტულად ეს ყველაფერი

განხილული იქნება შემდეგ პარაგრაფში. გარდა ამ ყველაფრის დაწვრილებით განხილვისა ნაშრომში ძირითადი ნაწილი დათმობილი აქვს $n = 3$ შემთხვევას. როგორც ვიცით კლასიკურ შემთხვევაში მესამე კოჰომოლოგიის ჯგუფი ხასიათდება ჯვარედინ-მოდულურ ტერმინებში, კერძოდ გვაქვს $H^n(G, A) \cong Ext^2(G, A)$ იზომორფიზმი სადაც $Ext^2(G, A)$ არის A -ს G -თი ორი სიგრძის ანუ რაც იგივეა ჯვარედინ-მოდულური გაფართოებების სიმრავლის გარკვეული ექვივალენტობის კლასები. როგორც $n = 2$ შემთხვევაში ჩვენს მიერ მიღებული შედეგიც წარმოადგენს ამ ფაქტის ანალოგს(განზოგადობას) უკვე სიმეტრიული კოჰომოლოგიის თეორიაში.

§1. აღნიშვნები, ძირითადი განმარტებები და საწყისი დებულებები

ვთქვათ G მულტიპლიკაციური ჯგუფია. Z_G -თი აღვნიშნოთ G -თი წარმოქმნილი თავისუფალი აბელური ჯგუფი. როგორც ცნობილია ამ შემთხვევაში Z_G -ს ელემენტებს აქვთ სახე: $k = \sum_{x \in G} k_x x$ სადაც $\forall x \in G$ თვის $k_x \in Z$ და მხოლოდ სასრული $k_x \neq 0$. ოპერაცია G -ში წარმოქმნის გამრავლებას Z_G -ში შემდეგნაირად $\sum_{x \in G} k_x x \sum_{y \in G} k_y y = \sum_{x, y \in G} k_x k_y xy$. თუ დავაკვირდებით ვნახავთ, რომ Z_G -ს ელემენტები სხვა არაფერია თუ არა სიმრავლური ასახვები k G -დან Z -ში ისეთი, რომ $k(x) = 0$ თითქმის ყველა x -თვის G -დან. ცხადია ბუნებრივად განიმარტება, Z_G -ს ორი ელემენტის ჯამი $(k+k')(x) = k(x) + k'(x)$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ორი ოპერაციის მიმართ Z_G წარმოადგენს რგოლს. ვთქვათ მოცემული გვაქვს G მულტიპლიკაციური და A აბელური ჯგუფი. შემოვიღოთ შემდეგი

განმარტება 1.1 ვიტყვი, რომ G მოქმედებს A -ზე თუ $\forall g, g_1 \in G$ და $\forall a, a' \in A$ -თვის ${}^g a \in A$ და ადგილი აქვს ტოლობებს.

1. ${}^{g_1} a = {}^g a + {}^{g_1} a$.
2. ${}^g(a + a') = {}^g a + {}^g a'$.

ახლა მოვიყვანოთ ერთი მარტივი წინადადება დაუმტკიცებლად, რომლის დამტკიცებაც შეგიძლიათ იხილოთ [1]-ში.

წინადადება 1.1 ვთქვათ G ჯგუფი მოქმედებს A აბელურ ჯგუფზე $\Rightarrow A$ Z_G მოდულია.

ხშირად ტერმინ Z_G მოდული-ს ნაცვლად ხმარობენ უბრალოდ G მოდულს აქედან და წინადადება 1.1-დან გამომდინარე შემდეგში როცა ვიტყვი, რომ გვაქვს G ჯგუფი და G მოდული A ვიგულისხმებთ, რომ გვაქვს G მულტიპლიკაციური ჯგუფის რაიმე ფიქსირებული მოქმედება A აბელურ ჯგუფზე.

ახლა მოვიყვანოთ რამოდენიმე განმარტება კლასიკური ჰომოლოგიის თეორიიდან, ვთქვათ გვაქვს G ჯგუფი და G მოდული A . შემოვიღოთ აღნიშვნა $C^n(G, A) \equiv \{\sigma : G^n \rightarrow A\}$ სადაც σ არის ნებისმიერი სიმრავლური ასახვა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასახვათა ჩვეულებრივი შეკრების ოპერაციის მიმართ $\forall n \in N$ -თვის $C^n(G, A)$ წარმოადგენს აბელურ ჯგუფს. განვსაზღვროთ $\delta_n : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ შემდეგნაირად:

$$\delta_n(\sigma)(g_1 \dots g_{n+1}) = {}^{g_1} \sigma(g_2 \dots g_{n+1}) - \sigma(g_1 g_2 \dots g_{n+1}) + \dots + (-1)^n \sigma(g_1 \dots g_n g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \sigma(g_1 \dots g_n)$$

ინდიქსით მარტივად მტკიცდება შემდეგი:

წინადადება 1.2 (იხ. [1]) $\forall n \in N$ -თვის $\delta_n \delta_{n-1} = 0$

ანუ მივიღეთ, რომ

$$C^* : C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} C^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

წარმოადგენს აბელური ჯგუფების კომპლექს დიფერენციალით δ .

განმარტება 1.2 $\forall n \in N$ -თვის $H^n(G, A) = Ker \delta_n / Im \delta_{n-1}$ ფაქტორ-ჯგუფს ეწოდება n -ური კოჰომოლოგიის ჯგუფი G -სი კოეფიციენტებით A -ში.

კოჰომოლოგიის ჯგუფების დახასიათება კლასიკური ჰომოლოგიური ალგებრის ერთ-ერთი ძირითადი ნაწილია და მათემატიკის ამ დარგში მიღებულ კლასიკურ შედეგებზე შემდეგ პარაგრაფებში გვექნება საუბარი, ახლა გადავიდეთ ე.წ სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფების განსაზღვრაზე. ვთქვათ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A . კლასიკური გზით ავაგოთ კომპლექსი

$$C^* : C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} C^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

გარკვეული ტოპოლოგიური საკითხებიდან გამომდინარე საჭირო ხდება $\forall n \in N$ -თვის განვიხილოთ სიმეტრიული ჯგუფ Σ_{n+1} -ის მოქმედება $H^n(G, A)$ -ზე. τ_i -თი აღვნიშნოთ გადანაცვლება რომელიც $n+1$ ელემენტიანი სიმრავლის i -ურ და $i+1$ -ე წევრებს უცვლის ადგილს, ცხადია $\tau_i \in \Sigma_{n+1}$. $i = 0, 1, \dots, n$ -თვის განვსაზღვროთ τ_i -ს მოქმედება $H^n(G, A)$ -ზე შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \tau_1 \sigma(g_1 \dots g_n) &= -g_1 \sigma((g_1)^{-1}, g_1 g_2, g_3 \dots g_n) \\ \tau_i \sigma(g_1 \dots g_n) &= -\sigma(g_1 \dots g_{i-1} g_i, (g_i)^{-1}, g_i g_{i+1} \dots g_n) \text{ როცა } 1 < i < n \\ \tau_n \sigma(g_1 \dots g_n) &= -\sigma(g_1 \dots g_{n-1} g_n, (g_n)^{-1}) \end{aligned}$$

ახლ დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ კიდევ ერთი-წინადადება

წინადადება 1.3 (იხ, [2]) ზემოთ მოცემული ფორმულებით ცალსახად განისაზღვრება Σ_{n+1} -ის მოქმედება $H^n(G, A)$ -ზე და ეს მოქმედება შეთანხმებულია δ დიფერენციალთან. რაც ნიშნავს, რომ $\forall x \in \Sigma_{n+1}$ -თვის თუ ${}^x \sigma = \sigma$ მაშინ ${}^x \delta(\sigma) = \delta \sigma$

ასევე ვიტყვით, რომ $\sigma : G^n \rightarrow A$ ასახვა არის სიმეტრიული თუ ${}^x \sigma = \sigma$ $\forall x \in \Sigma_{n+1}$ -თვის. შემოვიღოთ კიდევ ერთი

განმარტება 1.3 ამ მოქმედების მიმართ ინვარიანტული ელემენტები ქმნიან C^* -ს ქვეკომპლექს CS^* -ს

$$CS^* : CS^0 \xrightarrow{\delta_0^S} CS^1 \xrightarrow{\delta_1^S} CS^2 \xrightarrow{\delta_2^S} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}^S} CS^n \xrightarrow{\delta_n^S} CS^{n+1} \longrightarrow \dots$$

სადაც $CS^i = \Sigma_{i+1} C^i$ ხოლო δ_i^S წარმოადგენს δ_i -ს შეზღუდვას CS^i -ზე,

ამ კომპლექსის ჰომოლოგიის ჯგუფებს $HS^n(G, A)$ -ს ეწოდება სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფები G -სი კოეფიციენტებით A -ში.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს ბუნებრივი ჰომომორფიზმი $HS^n(G, A) \rightarrow H^n(G, A)$. ასევე ნებისმიერ i -თვის ადგილი აქვს შემდეგ სიმრავლურ დამოკიდებულებებს:

$$CS^i \subset C^i, Ker\delta_i^S \subset Ker\delta_i \text{ და } Im\delta_i^S \subset Im\delta_i$$

§2 ჯგუფური გაფართოებები

ვთვათ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A . ჯგუფური გაფართოება A -სი G -თი ეწოდება შემდეგი სახის ნებისმიერ მოკლე ზუსტ მიმდევრობას:

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

სადაც G -ს A -ზე მოქმედება შეთანხმებულია B -ს თავის თავზე შეუღლებით მოქმედებასთან, რაც ნიშნავს იმას, რომ $i(ga) = \pi^{-1}(g) + (a) - \pi^{-1}(g)$. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ფიქსირებული G და A -თვის ავაგოთ ყველა შესაძლო გაფართოება. ბუნებრივად ისმის კითხვა არის თუ არა გაფართოებების სიმრავლე ყოველთვის არა ცარიელი? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად შემოვიღოთ შემდეგი:

განმარტება 2.1 ვთქვათ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A მაშინ ადიციურ მაგრამ არააუცილებლად აბელურ ჯგუფს $A \rtimes G$ ეწოდება A და G -ს ნახევრადპირდაპირ ნამრავლი. $A \rtimes G$ სიმრავლურად ემთხვევა $A \times G$ -ს ხოლო შეკრების ოპერაცია მასში განმარტება შემდეგნაირად:

$$(a, g) + (a_1, g_1) = (a + {}^g a_1, gg_1)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ოპერაციის მიმართ $A \times G$ ნამდვილად წარმოადგენს ჯგუფს "ერთეულით" $0 = (0, 1)$.

ახლა უკვე შეგვიძლია პასუხი გავცეთ ჩვენს მიერ დასმულ შეკითხვას, კერძოდ ადგილი აქვს შემდეგს

წინადადება 2.1 თუ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A მაშინ ყოველთვის არსებობს ერთი მაინც ჯგუფური გაფართოება A -სი G -თი

$$E_0 : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \rtimes G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

სადაც $i(a) = (a, 1)$ და $\pi(a, b) = b$

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ i ასახვა მონომორფიზმია ხოლო π ეპიმორფიზმი, რაც ტრივიალურია. $\square$

როგორც ვნახეთ ჯგუფური გაფართოებების სიმრავლე ყოველთვის არა ცარიელია, ახლა გადავიდეთ თვითონ ამ სიმრავლის შესწავლაზე და განვმარტოთ თუ რას ეწოდება მორფიზმი ორ გაფართოებას შორის.

განმარტება 2.2 ვთქვათ მოცემულია, ორი ჯგუფური გაფართოება E და E' ჯგუფური ჰომომორფიზმების სამეულს $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ ეწოდება მორფიზმი $\Gamma : E \rightarrow E'$ თუ კომუტატიურია დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccccccc} E : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ E' : 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & G' \longrightarrow 1 \end{array}$$

ვთქვათ $A = A'$ და $G = G'$ და $\Gamma : E \rightarrow E'$ მაშინ თუ $\alpha = Id_A$ და $\gamma = Id_G$ E და E' გაფართოებებს ეწოდებათ კონგრუენტული. ხოლო Γ -ს კონგრუენტულობის მორფიზმი

წინადადება 2.2 თუ $\Gamma : E \rightarrow E'$ კონგრუენტულობის მორფიზმია მაშინ β ასახვა არის იზომორფიზმი.

დამტკიცება: უშუალოდ გამოდის 5 ჰომომორფიზმის შესახებ არსებული ლემიდან $\square$

დამტკიცებული წინადადებიდან ცხადია, რომ კონგრუენტულობის მორფიზმს გააჩნია შებრუნებული, ასევე ელემენტალური შესამოწმებელია, რომ კონგრუენტულობის მორფიზმი არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული მიმართება გაფართოებებს შორის, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია A -ს G -თი გაფართოებების სიმრავლე დავყოთ ექვივალენტობის კლასებად სადაც თითოეული კლასში შევლენ ერთმანეთის კონგრუენტული გაფართოებები. მიღებული სიმრავლე აღინიშნება $\text{Opext}(G, A)$ -თი.

შენიშვნა 2.1 საზოგადოდ $\text{Opext}(G, A)$ სიმრავლე დამოკიდებულია არა მარტო G და A ჯგუფებზე არამედ იმაზეც თუ როგორ მოქმედებს G ჯგუფი A -ზე მაგრამ რადგან ჩვენ თავშივე ვიგულისხმეთ, რომ ეს მოქმედება ფიქსირებულია ამიტომ აღარ ვამახვილებთ ყურადღებას მასზე.

ახლა მოვიყვანოთ ჯგუფური გაფართოებების შესახებ ერთ-ერთი ყველაზე კლასიკური და მნიშვნელოვანი შედეგი ჰომოლოგიური ალგებრიდან

წინადადება 2.3 ვთქვათ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A მაშინ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $\omega : \text{Opext}(G, A) \rightarrow H^2(G, A)$ ისეთი, რომ $\omega(E_0) = 0$ ანუ ფაქტიურად $\text{Opext}(G, A)$ წარმოადგენს ჯგუფს "ერთეულოვანი" ელემენტით E_0

დამტკიცება: დეტალური დამტკიცებისთვის იხ.[1] ჩვენ უბრალოდ გავამახვილოთ ყურადღება იმაზე თუ როგორ შევუსაბამოთ $f : G \times G \rightarrow A$ კოციკლს გაფართოება. f -ის შესაბამისი გაფართოება იქნება

$$E_0 : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \rtimes_f G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

სადაც ოპერაცია $A \rtimes_f G$ -ში განიმარტება შემდეგნაირად:

$$(a, g) + (a_1, g_1) = (a + ga_1 + f(x, y), +gg_1)$$

მტკიცდება, რომ ეს ასახვა კორექტულია, ამ ასახვით ერთი კლასის ელემენტები ერთ კლასში გადადიან და რომ სწორედ ამ ასახვით გამოწვეული ასახვა $H^2(G, A) \rightarrow \text{Opext}(G, A)$ წარმოადგენს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას.

§3. ჯვარედინ-მოდულური (ორი სიგრძის) გაფართოებები

ვთქვათ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A . შემოვიღოთ

განმარტება 3.1 სამეულს A , G და $\mu : A \rightarrow G$ ჯგუფურ ჰომომორფიზმს ეწოდება ჯვარედინი მოდული თუ შესრულებულია პირობები:

1. $\mu(ga) = {}^g\mu(a)$ ნებისმიერი $a \in A$ და $g \in G$ -თვის
2. $\mu({}^ba) = \mu({}^ba)$ ნებისმიერი $a, b \in A$ -თვის

სადაც G და A ჯგუფები თავის თავზე მოქმედებენ შეუღლებით. ხშირად A -ს უწოდებენ ჯვარედინი მოდულის მოდულურ ნაწილს და აღნიშნავენ Mp -თი (Modul Part) ხოლო G -ს ჯგუფურ ნაწილს და აღნიშნავენ Gp -თუ (Group Part). ჩვენც ვისარგებლებთ ამ აღნიშვნებით. ვთქვათ ახლა მოცემულია ორი ჯვარედინი მოდული $W : \mu : Mp \rightarrow Gp$ და $W' : \mu' : Mp' \rightarrow Gp'$

განმარტება 3.2 ჯგუფური ჰომომორფიზმების წყვილს $\phi = (\phi_1, \phi_0)$ ეწოდება მორფიზმი ჯვარედინ მოდულებს შორის თუ კომუტაიურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} Mp & \xrightarrow{\mu} & Gp \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ Mp' & \xrightarrow{\mu'} & Gp' \end{array}$$

და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\phi_1(xm) = \phi_0(x) \phi_1(m)$$

სადაც $x \in Gp$ და $m \in Mp$

მოცემული G ჯგუფისთვის და G მოდულ A -თვის შემოვიღოთ კიდევ ერთი განმარტება

განმარტება 3.3 ჯვარედინ მოდულური გაფართოება ან რაც იგივეა 2 სიგრძის გაფართოება A -სი G -თი ეწოდება ზუსტ მიმდევრობას

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} Mp \xrightarrow{\mu} Gp \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

სადაც $\mu : MP \rightarrow GP$ წარმოადგენს ჯვარედინ მოდულს.

ბუნებრივია როგორც ჯგუფური გაფართოებების შემთხვევაში ჯვარედინ-მოდულური გაფართოებების სიმრავლეშიც უნდა შემოვიღოთ გარკვეული ექვივალენტობა. ამისათვის განვსაზღვროთ რას ნიშნავს მორფიზმი ორ E და E' ჯვარედინ-მოდულურ

გაფართოებებს შორის სადაც E და E' -ც წარმოადგენს A -ს გაფართოებას G -ში

განმარტება 3.4 $\phi : E \rightarrow E'$ -ს ეწოდება ჯვარედინ-მოდულურ გაფართოებებს შორის მორფიზმი თუ იგი წარმოადგენს მორფიზმს ჯვარედინ-მოდულებს შორის და კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp & \xrightarrow{\mu} & Gp & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow Id_A & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow Id_G & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp' & \xrightarrow{\mu'} & Gp' & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

განსხვავებით ჯგუფური გაფართოებების შემთხვევისგან ორი სიგრძის გაფართოებებში შემოღებული მორფიზმი არ წარმოადგენს ექვივალენტობის მიმართებას (კერძოდ იგი არ არის სიმეტრიული), ამიტომ ბუნებრივია განვიხილოთ ამ მიმართებით წარმოქმნილი ექვივალენტობის მიმართება ჯვარედინ-მოდულურ გაფართოებების სიმრავლეზე. A -ს G -ში ორი-სიგრძის გაფართოებებზე ამ მიმართებით მიღებული ექვივალენტობის კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\text{Ext}^2(G, A)$ -თი. სანამ ამ თავის ძირითად თეორემას ჩამოვაყალიბებდეთ მანამდე მოვიყვანოთ რამოდენიმე განმარტება.

განმარტება 3.5 ვთქვათ მოცემულია ორი-სიგრძის გაფართოება

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} Mp \xrightarrow{\mu} Gp \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

ამ გაფართოების კვთების სისტემა ეწოდება წყვილს (s^0, s^1) სადაც $s^0 : G \rightarrow Gp$ წარმოადგენს π -ს სიმრავლურ კვთას, ხოლო $s^1 : Im \mu \rightarrow Mp$ μ ასახვის სიმრავლურ კვთას.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $s^0 : G \rightarrow Gp$ კვთა წარმოქმნის ასახვას $\sigma : G \times G \rightarrow Ker \pi$ განსაზღვრულს შემდეგნაირად, $\sigma(g, h) = s^0(g)s^0(h)s^0(gh)^{-1}$

განმარტება 3.6

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} Mp \xrightarrow{\mu} Gp \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

გაფართოებისთვის (Z^1, Z^2) ასახვების წყვილს ეწოდება აწევათა სისტემა თუ $Z^1 : G \rightarrow Gp$ წარმოადგენს Id_G -ს აწევას π -ში ხოლო $Z^2 : G \times G \rightarrow Mp$ წარმოადგენს z^2 -ს აწევას μ -ში.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი განმარტება

განმარტება 3.7

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} Mp \xrightarrow{\mu} Gp \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

გაფართოებისთვის $Z^1 = s^0$ და $Z^2 = s^1 z^2$ ასახვებს ეწოდებათ (s^0, s^1) კვეთებისგან წარმოქმნილი აწევათა სისტემა.

შენიშვნა 3.1 მოცემული ორი-სიგრძის გაფართოებისთვის და ნებისმიერი აწევათა (Z^1, Z^2) სისტემისთვის ასახვა $z^3 : G^3 \rightarrow A$ განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$z^3(g, h, k) = i^{-1}(Z^2(g, h)Z^2(gh, k)(Z^2(g, hk))^{-1}(Z^1(g)(Z^2(h, k))^{-1}))$$

წარმოადგენს კოციკლს და მას ეწოდება (Z^1, Z^2) აწევათა სისტემის შესაბამისი კოციკლი, თუ (Z^1, Z^2) თავის მხრივ (s^0, s^1) კვეთებისგანაა წარმოქმნილი მაშინ მას ასევე ეწოდება ამ კვეთათა სისტემის შესაბამისი კოციკლიც.

ახლა ჩვენ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ რამდენიმე ცნობილ ფაქტს, რომელთა დეტალური მტკიცებაც შეგიძლია იხილოთ [3]-ში. ჩვენ უბრალოდ ყურადღებას გავამახვილებთ იმ დეტალებზე რომლებიც დაგვჭირდება საბოლოო შედეგის მისაღებად.

წინადადება 3.1 ვთქვათ მოცემულია გაფართოება E აწევათა სისტემით

(Z^1, Z^2) მაშინ ნებისმიერი $c : G \times G \rightarrow A$ კოციკლისთვის $(Z^1, \overline{Z^2})$

სადაც $\overline{Z^2}(g, h) = ic(g, h)Z^2(g, h)$ ხოლო (Z^1, Z^2) და $(Z^1, \overline{Z^2})$ -ის შესაბამის მესამე განზომილების კოციკლებს აქვთ სახე $z_{Z^1, \overline{Z^2}}^3 = z_{Z^1, Z^2}^3 + \delta^2(c)$.

პირიქით ნებისმიერი ორი $\overline{Z^2}$ და Z^2 აწევისთვის $c(g, h) = i^{-1}(\overline{Z^2}(g, h)Z^2(g, h)^{-1})$ წარმოადგენს კოციკლს.

ასევე მტკიცება, რომ თუ შევცვლით Z^1 აწევასაც მიღებული კოციკლი კლავ თავიდან აღებული კოჰომოლოგიურად ექვივალენტური იქნება, ანუ ფაქტიურად ნაჩვენებია, რომ ორი-სიგრძის გაფართოებებიდან გვაქვს კორექტული ასახვა $H^3(G, M)$ -ში. ამის შემდეგ მტკიცდება, რომ ეს ასახვა წარმოქმნის კორექტულ ასახვას უკვე $Ext^2(G, A)$ -დან $H^3(G, M)$ -ში, ანუ ერთმანეთის ექვივალენტურ გაფართოებებს ერთი და იგივე კლასი შეესაბამებათ, აქაც ჩვენ ყურადღება გავამახვილოთ ჩვენთვის საჭირო დეტალზე

წინადადება 3.2 თუ გვაქვს მორფიზმი ორ გაფართოებას შორის

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp & \xrightarrow{\mu} & Gp & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow Id_A & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow Id_G & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp' & \xrightarrow{\mu'} & Gp' & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

და პირველი გაფართოების აწევათა სისტემაა (Z^1, Z^2) მაშინ $(\phi_0 Z^1, \phi_1 Z^2)$ წარმოადგენს მეორე გაფართოების აწევათა სისტემას და ამ სისტემებით წარმოქმნილი კოციკლები ერთმანეთის ტოლია.

ახლა ჩამოვყალიბოთ ამ პარაგრაფის ძირითადი თეორემა:

თეორემა 3.1 ადგილი აქვს იზომორფიზმს $Ext^2(G, A) \cong H^3(G, M)$.

ადგილი შესამოწმებელია, რომ აგებული ასახვა ინექციაა, ჩვენ გვაინტერესებს თუ როგორ შეესაბამება მესამე განზომილების კოციკლს ორი-სიგრძის გაფართოება. შემდეგ უნდა შემოწმდეს, რომ ამ ასახვით გამოწვეული ასახვა ნამდვილად კორექტულია და წარმოადგენს უკვე აგებული ასახვის შეზღუდვას, თუმცა ჩვენ როგორც ვთქვით ყურადღებას გავამახვილებთ მხოლოდ ჩვენთვის საინტერესო დეტალებზე, კერძოდ თუ როგორ ეთანადება კოციკლს გაფართოება.

ვთქვათ მოცემულია z^3 კოციკლი, F -ით აღვნიშნოთ G -თი როგორც სიმრავლით წარმოქმნილი თავისუფალი ჯგუფი. მაშინ შესაბამისი გაფართოება იქნება:

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \times Ker\pi \xrightarrow{\mu} F \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

სადაც $i(a) = (a, 0)$, $\mu(a, r) = r$ ამ გაფართოებას შევუსაბამოთ კვთების სისტემა $s^0 : G \rightarrow F$ იყოს სიმრავლური ჩადგმა ხოლო $s^1 : Ker\pi \rightarrow A \times Ker\pi$ გავსაზღვროთ შემდეგნაირად $s^1(r) = (0, r)$ ამ კვთებით წარმოქმნილი აწევების სიტემა იყოს (Z^1, Z^2) ადგილი შესამოწმებელია, რომ $A \times Ker\pi$ -ს წარმოქმნილი სიმრავლეა $Im i \cup Im Z^2$ და ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული მოქმედება ცალსახად განსაზღვრავს F მოდულურ სტრუქტურას მთელს $A \times Ker\pi$ -ზე, ხოლო ამ სიმრავლეზე მოქმედება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $Z^1(g)i(a) = i(ga)$ და $Z^1(g)Z^2(h, k) = i^{-1}z^3(g, h, k)(Z^2(g, h) = Z^2(gh, k)(Z^2(g, hk))^{-1}$, მტკიცდება, რომ ასე ნადმილად განისაზღვრება ჯვარედინ-მოდულური გაფართოება $E(z^3)$ და რომ ასე განსაზღვრული კვთების შესაბამისი კოციკლი ემთხვევა თავიდან აღებულს. ამ კვთების წყვილს ვუწოდოთ სტანდარტული კვთების წყვილი.

შენიშვნა 3.2 ვთქვათ მოცემულია რაიმე გაფართოება E აწევების წყვილით (Z^1, Z^2) და მათი შესაბამისი კოციკლი არის z^3 . $(\overline{Z^1}, \overline{Z^2})$ -ით აღვნიშნოთ $E(z^3)$ გაფართოების სტანდარტული კვთებისგან წარმოქმნილი აწევათა სისტემა, მაშინ არსებობს ერთადერთი გაფართოებების მორფიზმი $\omega : E(z^3) \rightarrow E$ ისეთი, რომ $\omega_0 \overline{Z^1} = Z^1$ და $\omega_1 \overline{Z^2} = Z^2$

§4. სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფები დაბალ განზომილებებში

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ რამოდენიმე ფაქტს ნულოვან, პირველ და მეორე სიმეტრიულ კოჰომოლოგიის ჯგუფების შესახებ. აქაც იგულისხმება, რომ მოცემულია G ჯგუფი და G მოდული A . დავიწყით ყველაზე მარტივი $n = 0$ შემთხვევით. განვიხილოთ შესავალში აგებული კომპლექსი:

$$C^* : C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} C^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

კოჰომოლოგიის ჯგუფის განმარტებიდან გვაქვს, $H^0(G, A) = \text{Ker} \delta_0$. სიმეტრიული კოჰომოლოგიის განმარტებიდან ცხადია, რომ $HS^0(G, A) = \text{Ker} \delta_0^S = {}^{\Sigma_1} \text{Ker} \delta_0 = {}^{\Sigma_1} H^0(G, A)$. მაგრამ რადგან Σ_1 წარმოადგენს ერთ-ელემენტიან ჯგუფს ამიტომ მისი მოქმედება ნებისმიერ ჯგუფზე ყოველთვის იქნება ტრივალური ანუ იგივური. გამოდის, რომ მივიღეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4.1 $HS^0(G, A) = H^0(G, A)$

ახლა გადავიდეთ $n = 1$ შემთხვევაზე. განმარტების თანახმად გვაქვს $H^1(G, A) = \text{Ker} \delta_1 / \text{Im} \delta_0$ ხოლო $HS^1(G, A) = \text{Ker} \delta_1^S / \text{Im} \delta_0^S$. შევნიშნოთ, რომ δ_0^S და δ_0 ასახვებს აქვთ ერთი და იგივე განსაზღვრის არე $C^0 = {}^{\Sigma_1} C^0 = C^S$ და შესაბამისად $\text{Im} \delta_0 = \text{Im} \delta_0^S$. გარდა ამისა როგორც ვიცით $\text{Ker} \delta_1^S \subset \text{Ker} \delta_1$ აქედან ცხადია, რომ ბუნებრივი ასახვა $\text{Ker} \delta_1^S / \text{Im} \delta_0^S = HS^1(G, A) \rightarrow H^1(G, A) = \text{Ker} \delta_1 / \text{Im} \delta_0$ არის ინექცია. ანუ ფაქტიურად ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 4.2 $HS^1(G, A) \rightarrow H^1(G, A)$ ბუნებრივი ასახვა ყოველთვის ინექციაა

ახლა გადავიდეთ $n = 2$ შემთხვევაზე ჩვენი მიზანია დავახსიათოთ $HS^2(G, A)$. ამისათვის ჯერ ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ერთი პატარა

თეორემა 4.3 ბუნებრივი ასახვა $HS^2(G, A) \rightarrow H^2(G, A)$ ყოველთვის ინექციაა.

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ $\sigma \in \text{Ker} \delta_2^S \cap \text{Im} \delta_1 \Rightarrow \sigma \in \text{Im} \delta_1^S$. თუ $\sigma \in \text{Ker} \delta_2^S \cap \text{Im} \delta_1$ გვექნება

$$\sigma(g, h) = -{}^g \phi(h) + \phi(gh) - \phi(g)$$

ხოლო σ -ს სიმეტრიულობის გამო გვექნება:

$$\sigma(g, h) = -^g\sigma(g^{-1}, h) = -\phi(gh) + ^g\phi(h) - ^g\phi(g^{-1})$$

$$\sigma(g, h) = -\sigma(gh, h^{-1}) = -^{gh}\phi(h^{-1}) + \phi(g) - \phi(gh)$$

პირველი და მეორე ტოლობებიდან გვაქვს, რომ $\phi(g) = -^g\phi(g^{-1})$ რაც ნიშნავს, რომ $\sigma \in \text{Im}\delta_1^S$ $\square$

გავიხსენოთ, რომ თუ მოცემულია კოცკლი σ მაშინ შესაბამისი გაფართოება არის

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

სადაც $X = A \rtimes_{\sigma} G$ და ოპერაცია მასში განისაზღვრება შემდეგნაირად $(a, g) + (a_1, g_1) = (a + ^ga_1 + \sigma(x, y), +gg_1)$ განვსაზღვროთ კვეთა, $s : G \rightarrow X$ შემდეგნაირად $s(g) = (0, g)$ დავუშვათ σ სიმეტრიულია მაშინ გვექნება:

$$s(g)(s(g^{-1})s(gh)) = (^g\sigma(g^{-1}, gh) + \sigma(g, h), gh) = (0, gh) = s(gh)$$

$$(s(gh)s(h^{-1}))s(h) = (\sigma(g, h) + \sigma(gh, h^{-1}), gh) = (0, gh) = s(gh)$$

ანუ მივიღეთ, რომ თუ კოცკლი სიმეტრიულია მაშინ მისი შესაბამისი გაფართოების სტანდარტული კვეთა აკმაყოფილებს პირობას:

$$s(g)^{-1} = s(g^{-1})$$

ახლა პირიქით ვთქვათ გვაქვს კვეთა $t : G \rightarrow X$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$t(g)^{-1} = t(g^{-1})$$

განვიხილოთ ამ კვეთის შესაბამისი კოცკლი

$$\sigma(g, h) = i^{-1}(t(g), t(h), t(gh))^{-1}$$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ σ სიმეტრიულია, გვაქვს:

$$\begin{aligned} ^g\sigma(g^{-1}, gh) &= ^gi^{-1}(t(g^{-1})t(gh)t(h^{-1})) = \\ &= i^{-1}(t(g)t(g^{-1})t(gh)t(h^{-1})t(g^{-1})) = \\ &= i^{-1}(t(gh)t(h)^{-1}t(g)^{-1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i^{-1}((t(g)t(h)t(gh)^{-1})^{-1}) = \\
&= -i^{-1}(t(g)t(h)t(gh)^{-1})
\end{aligned}$$

ანალოგიურად:

$$\begin{aligned}
\sigma(gh, h^{-1}) &= i^{-1}(t(gh)t(h^{-1})t(g^{-1})) = \\
&= i^{-1}((t(g)t(h)t(gh)^{-1})^{-1}) = \\
&= -i^{-1}(t(g)t(h)t(gh)^{-1}) = \\
&= -i^{-1}(t(g)t(h)t(gh)^{-1})
\end{aligned}$$

ავიღოთ ახლა ზემოთ მოცემული გაფართოებისთვის π ასახვის ნებისმიერი ორი t_1 და t_2 კვეტები, მათი შესაბამისი კოციკლები იყოს σ_1 და σ_2 რადგან ორივე კოციკლი ერთი და იმავე გაფართოებას შეესაბამება ამიტომ ისინი კოჰომოლოგიურად ექვივალენტურია ხოლო თეორემა 4.3-დან გამომდის რომ ეს კოციკლები არის ერთი და იგივე კლასში $HS^2(G, A)$ -ში. ამ ყველაფრიდან მარტივად გამომდის

თეორემა 4.4 $HS^2(G, A) \cong \widehat{Ext^1(G, A)}$ სადაც $\widehat{Ext^1(G, A)} \subset \text{Opext}(G, A)$ და წარმოადგენს ისეთი გაფართოებების ექვივალენტობის კლასების, სიმრავლეს რომელთაც გააჩნიათ კვეტა $t : G \rightarrow A$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $t(g^{-1}) = t(g)^{-1}$.

დამტკიცება: უშუალოდ გამომდის ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან და წინადადება 2.3-დან. $\square$

აქვე შევნიშნოთ, რომ ჯერ კიდევ არ არის ცნობილი $n = 3, 4, 5..$ შემთხვევებისთვის რა დამოკიდებულებაა სიმეტრულ კოჰომოლოგიის ჯგუფსა და ჩვეულებრივ კოჰომოლოგიის ჯგუფს შორის, შემდეგ თავში ჩვენ სწორად $n = 3$ შემთხვევას შევისწავლით.

§5. მესამე სიმეტრიული კოჰომოლოგიის ჯგუფი

როგორც უკვე აღვნიშნეთ $n = 3$ ის შემთხვევაში ზოგადად შეიძლება $HS^3(G, A) \rightarrow H^3(G, A)$ არ იყოს ინექცია, ამიტომ კლასიკური შედეგის $n = 2$ შემთხვევის ანალოგიურად განზოგადოება ამ შემთხვევაში შეუძლებელია.

ამიტომ უპრიანია ჩვენ განვიხილოთ სიმრავლე $\widehat{Ext}^2$ რომლის ელემენტებია A -ს G -თი ორი სიგრძის გაფართოებები ფიქსირებული აწევების წყვილით და აღვნიშნოთ მისი ელემენტები E_{Z^0, Z^1} -ით. განმარტების თანახმად

$$E_{Z^0, Z^1} = E'_{Z'^0, Z'^1} \Leftrightarrow E = E', Z^0 = Z'^0 \text{ და } Z^1 = Z'^1. \quad \widehat{Ext}S^2\text{-ით}$$

აღვნიშნოთ $\widehat{Ext}^2$ -ის ის და მხოლოს ის ელემენტები რომელთა შესაბამისი კოციკლები აკმაყოფილებენ პირობებს:

1. $z^3(g, h, k) = -g(z^3g^{-1}, gh, k)$
2. $z^3(g, h, k) = -z^3(gh, h^{-1}, hk)$
3. $z^3(g, h, k) = -z^3(g, hk^{-1}, k^{-1})$

განვიხილოთ $\widehat{Ext}S^2$ -ის ორი განსხვავებული ელემენტი E_{Z^0, Z^1} და $E'_{Z'^0, Z'^1}$

განმარტება 5.1 $\phi : E \rightarrow E'$ ორი სიგრძის გაფართოებებს შორის მორფიზმს ვუწოდოთ მორფიზმი E_{Z^0, Z^1} და $E'_{Z'^0, Z'^1}$ -ს შორისაც თუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$\phi_o Z^1 = Z'^1$ და $\phi_1 Z^2(g, h)(Z^2 - 1(g, h))^{-1} = ic(g, h)$ სადაც $c : G \times G \rightarrow A$ არის მეორე განზომილების სიმეტრიული კოციკლი. ეს მორფიზმი

ცხადია წარმოადგენს გარკვეულ რეფლექსურ მიმართებას $\widehat{Ext}S^2$ -ზე, განვიხილოთ მისით წარმოქმნილი ექვივალენტობის მიმართება და შესაბამისი ექვივალენტობის კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\underline{\widehat{Ext}S^2}$ -ით.

ლემა 5.1 ასახვა $\alpha : \underline{\widehat{Ext}S^2} \rightarrow HS^3(G, A)$ $\alpha(cl(E_{Z^1, Z^2})) = z^3_{Z^1, Z^2} + Im\delta^S_2$ რომელიც თითოეულ კლასს უთანადებს ამ კლასის ნებისმიერი ელემენტის შესაბამისი კოციკლის კლასს $HS^3(G, A)$ -ს არის კორექტული.

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ არსებობს მორფიზმი E_{Z^1, Z^2} და $E'_{Z'^1, Z'^2}$ -ს შორის მაშინ შესაბამისი კოციკლები კოჰომოლოგიურად ექვივალენტურია. განვიხილოთ დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_{Z^1, Z^2} : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp & \xrightarrow{\mu} & Gp & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow Id_A & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow Id_G \\
E'_{\phi_0 Z^1, \phi_1 Z^2} : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp' & \xrightarrow{\mu'} & Gp' & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow Id_A & & \downarrow Id_{Mp'} & & \downarrow Id_{Mp'} & & \downarrow Id_G \\
E'_{Z'^1, Z'^2} : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp' & \xrightarrow{\mu} & Gp' & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1
\end{array}$$

განმარტება 5.1-სა და წინადადება 3.1-ის ძალით გამოდის რომ $z^3_{Z^0, Z^1} + Im\delta_2^S = z^3_{Z'^0, Z'^1} + Im\delta_2^S$ $\square$

ახლა ჩამოავყილობთ და დავამტკიცოთ ნაშრომის ძირითადი თეორემა

თეორემა 5.1 $\alpha : \underline{Ext}S^2 \rightarrow HS^3(G, A)$ ასახვა არის იზომორფიზმი.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ α სურექციაა. მართლაც ავიღოთ ნებისმიერი $z^3 + Im\delta_2^S \in HS^3(G, A)$ და განვიხილოთ $E(z^3)_{Z^1, Z^2}$ სადაც (Z^1, Z^2) სტადანტული კვებებით წარმოქმნილი აწევების სისტემაა. ცხადია $E(z^3)_{Z^1_{z^3}, Z^2_{z^3}} \in \underline{Ext}S^2$ და $\alpha(cl(E(z^3)_{Z^0, Z^1})) = z^3 + Im\delta_2^S$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ α ინექციაა, დავუშვათ $\alpha(cl(E_{Z^1, Z^2})) = \alpha(cl(E'_{Z'^1, Z'^2}))$. (Z^1, Z^2) -ით წარმოქმნილი კოციკლი აღვნიშნოთ z^3 -ით ხოლო (Z'^1, Z'^2) -ით წარმოქმნილი z'^3 -ით. მაშინ გვექნება $z^3 - z'^3 = \delta_2^S(c)$ სადაც c სიმეტრიული კოციკლია. განვიხილოთ $E^0_{Z^1_0, Z^2_0}$ სადაც $E^0 = E', Z^1_0 = Z'^1$ და $Z^2_0 = icZ^2$. განმარტება 5.1-იდან კი ცხადია, რომ $cl(E'_{Z'^1, Z'^2}) = cl(E^0_{Z^1_0, Z^2_0})$ წინადადება 3.1-ის ძალით კი გვექნება $z^3_0 = z'^3$ სადაც z^3_0 წარმოქმნილია Z^1_0, Z^2_0 -თი. ახლა თუ გამოვიყენებთ შენიშვნა 3.2-ს გვექნება, რომ არსებობს ერთადერთი წყვილი ორი სიგრძის გაფართოებების მორფიზმებისა ω და ω^0 ისეთი, რომ ω და ω^0 ასევე წარმოადგენენ მორფიზმებს შესაბამისად $E(z^3)_{Z^1_{z^3}, Z^2_{z^3}}$ და E_{Z^1, Z^2} შორის და $E(z^3)_{Z^1_{z^3}, Z^2_{z^3}}$ და $E^0_{Z^1_0, Z^2_0}$ შორის

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_{Z^1, Z^2} : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp & \xrightarrow{\mu} & Gp & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\
& & \uparrow Id_A & & \uparrow \omega_1 & & \uparrow \omega_0 & & \uparrow Id_G \\
E(z^3)_{Z^1_{z^3}, Z^2_{z^3}} : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & A \times Ker \pi & \xrightarrow{\mu} & F & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow Id_A & & \downarrow \omega^0_1 & & \downarrow \omega^0_0 & & \downarrow Id_G \\
E'_{Z^1_0, Z^2_0} : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & Mp' & \xrightarrow{\mu} & Gp' & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1
\end{array}$$

ანუ მივიღეთ, რომ $(cl(E_{Z^1, Z^2}) = cl(E^0_{Z^1_0, Z^2_0}) = cl(E'_{Z'^1, Z'^2}))$ $\square$

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] Mac Lane, S., "Homology", Springer-Verlag, New York, 1975. pp 103-120
- [2] Mihai D. Staic, "Symmetric cohomology of groups in low dimension", published online August 26, 2009.
- [3] Sebastian Thomas, "The third cohomology group classifies crossed module extensions", RWTH Aachen University, September 29, 2010.