

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

თამთა წუწუნავა

**დისკრეტულ განტოლებათა დადებითი ამონახსნების
არსებობის შესახებ უსასრულო შუალედში**

On the Positive Solutions of Discrete Equations in Infinite Interval

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ასოცირებული პროფესორი

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

თბილისი 2013

ს ა რ ჭ ე ვ ი

1. შესავალი	4
2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა	7
3. დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები	16
4. დისკრეტული განტოლების ამონახსნების საკმარისი პირობები	24
დასკვნა	31
ლიტერატურა	32

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

ნაშრომში განხილულია შემდეგი სახის სხვაობიანი განტოლება

$$\Delta u(k) + \sum_{i=1}^m p_i(k)u(\tau_i(k)) = 0,$$

სადაც, $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, $p_i: N \rightarrow R_+$, $\tau_i: N \rightarrow N$, $\tau_i(k) \leq k-1$ როცა $k \in N$ და

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_i(k) = +\infty, \quad (i=1, \dots, m).$$

ზემოთ მოცემული განტოლებისათვის მოყვანილია ამონახსნების რხევადობის (რხევადობის განმარტება იხილეთ ქვემოთ) ახალი საკმარისი პირობები.

A b s t a r c t

The following difference equation

$$\Delta u(k) + \sum_{i=1}^m p_i(k)u(\tau_i(k)) = 0$$

are considered, where $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, $p_i: N \rightarrow R_+$, $\tau_i: N \rightarrow N$, $\tau_i(k) \leq k-1$ for $k \in N$ and

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_i(k) = +\infty \quad (i=1, \dots, m).$$

In the work sufficient conditions are established for all solutions of the above equation to be oscillatory.

1. შესავალი

ამონახსნების რხევადობის სისტემატიური კვლევა განტოლებისათვის

$$u'(t) + p(t)u(\tau(t)) = 0, \quad (1.1)$$

სადაც

$$p \in L_{loc}(R_+, R_+), \quad \tau \in C(R_+, R_+), \quad \tau(t) \leq t \text{ როცა } t \in R \text{ და } \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = +\infty.$$

იმ შემთხვევაში, როცა კოეფიციენტი და დაგვიანება მუდმივია, პირველად განხილული იყო ა. მიშკისის მიერ [1], (1.1) სახის განტოლებისათვის ამონახსნების რხევადობის ამოცანა შესწავლილია [2-4] შრომებში (იხ. აგრეთვე ამ შრომებში მითითებული ლიტერატურა). 1982 წელს კოპლატაძის და ჭანტურიას მიერ [3] დამტკიცებული იქნა შემდეგი სახის

თეორემა 1.1. თუ

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{\tau(t)}^t p(s) ds > \frac{1}{e}. \quad (1.2)$$

მაშინ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

აღსანიშნავია, რომ (1.2) პირობა არ შეიძლება შეიცვალოს პირობით

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \int_{\tau(t)}^t p(s) ds \geq \frac{1}{e} \quad (1.3)$$

მაგალითად იმ შემთხვევაში როცა

$$\tau(t) = t - \delta \quad \text{ან} \quad \tau(t) = \alpha t \quad \text{ან} \quad \tau(t) = t^\alpha,$$

სადაც $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, ჩვენ შეგვიძლია მოვიყვანოთ მაგალტები განტოლებებისა, სადაც, სრულდება (1.3) პირობა, მაგრამ (1.1) განტოლებას უსასრულო შუალედში გააჩნია დადებითი ამონახსნი (ე.ი. გააჩნია არარხევადი ამონახსნი).

ანალოგიური საკითხი შემდეგი განტოლებისათვის

$$w'(t) + \sum_{i=1}^m p_i(t)u(\tau_i(t)) = 0 \quad (1.4)$$

შესწავლილია შრომაში [5]. განვიხილოთ ეხლა (1.1) განტოლების დისკრეტული ანალოგი

$$\Delta u(k) + p(k)u(k) = 0, \quad (1.5)$$

სადაც

$$\Delta u(k) = u(k+1) - u(k), \quad p: N \rightarrow R_+, \quad \tau: N \rightarrow N, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau(k) = +\infty \quad (1.6)$$

ნებისმიერი $n \in N$ – თვის აღვნიშნოთ $N_n = \{n, n+1, \dots\}$.

განმარტება 1.1. ნებისმიერი $n \in N$ -თვის, აღვნიშნოთ $n_0 = \min\{\tau(k): k \in N_n\}$. ფუნქციას $u: N_{n_0} \rightarrow R$ ეწოდება (1.5) განტოლების წესიერი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (1.5) განტოლებას $n \in N_n$ სიმრავლეზე და $\sup\{|u(i)|: i \geq k\} > 0$ როცა, $k \in N_n$.

განმარტება 1.2. ჩვენ ვიტყვით, რომ (1.5) განტოლების წესიერი ამონახსნი რხევადია თუ ნებისმიერი $n \in N_{n_0}$ -თვის არსებობს $n_1, n_2 \in N_n$ ისეთი, რომ $u(n_1)u(n_2) \leq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ამონახსნს ეწოდება არარხევადი. (1.5) განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკითხი იმ შემთხვევაში, როცა $\tau(k) = k - n$ კარგად იყო შესწავლილი ლადასის, ფილოსის და სფიკასის მიერ [6]. კერძოდ მათ მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი

თეორემა 1.2. ვთქვათ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=k-n}^{k-1} p(i) > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \quad (1.7)$$

მაშინ განტოლების

$$\Delta u(k) + p(k)u(k-n) = 0 \quad (1.8)$$

ყოველი ამონახსნი რხევადია.

აღსანიშნავია, რომ (1.7) პირობა ოპტიმალურია. ე.ი. (1.7) პირობა არ შეიძლება შეიცვალოს პირობით

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=k-n}^{k-1} p(i) \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1.5) განტოლებისათვის, იმ შემთხვევაში როცა $\lim_{k \rightarrow +\infty} (k - \tau(k)) = +\infty$. ანალოგიური ამოცანა შესწავლილი იყო კოპლატაძის, სტავროულაქსის და ხატრაკაზის მიერ [4]. კერძოდ, მათ მიერ დამტკიცებული იქნა შემდეგი სახის:

თეორემა 1.3. ვთქვათ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=\tau(k)}^{k-1} p(i) > \frac{1}{e}. \quad (1.9)$$

მაშინ, (1.5) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

ცხადია, რომ

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{e},$$

როცა $n \in \mathbb{N}$. მაგრამ მიუხედავად ამისა, (1.9) პირობა არის გაუმჯობესებადი. ე.ი. (1.9)

პირობა არ შეიძლება შეიცვალოს პირობით,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=\tau(k)}^{k-1} p(i) \geq \frac{1}{e}. \quad (1.10)$$

შესაძლებელია ავადგოთ (1.5) განტოლების მაგალითი, სადაც $k - \tau(k) \rightarrow +\infty$, როცა $k \rightarrow +\infty$. სრულდება (1.10) პირობა, მაგრამ (1.5) განტოლებას უსასრულო შუალედში გააჩნია დადებითი ამონახსნი (ე.ი. ამოხსნა არარხევადი ამონახსნი). შესაბამისი მაგალითები მოყვანილი იქნება მოცემული ნაშრომის ბოლოს.

მოცემული შრომის მიზანია შესწავლილ იქნეს ამონახსნების რხევადობის საკითხი შემდეგი განტოლების შემთხვევაში.

$$\Delta u(k) + \sum_{i=1}^m p_i(k) u(\tau_i(k)) = 0, \quad (1.11)$$

სადაც Δ არის სხვაობის ოპერატორი და სრულდება შემდეგი პირობები

$$\Delta u(k) = u(k+1) - u(k), \quad p_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \tau_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{და} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_i(k) = +\infty, \quad (1.12)$$

აღმოჩნდა, რომ (1.11) განტოლების გამოკვლევა (1.5) განტოლებასთან შედარებით ბევრ სირთულესთან არის დაკავშირებული. ჩვენ შევეცდებით ქვემოთ შევისწავლოთ (1.11) განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკითხი, რომლისთვისაც დაგვჭირდება ზოგიერთი დამხმარე ლემის დამტკიცება.

2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

ვთქვათ $k_0 \in N$. U_{k_0} – ით აღვნიშნავთ (1.11) განტოლების ისეთ ამოხსნათა სიმრავლეს, რომელებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას $u(k) > 0$, როცა $k \geq k_0$.

ლემა 2.1. ვთქვათ, $k_0 \in N$ $U_{k_0} \neq \emptyset$, $u \in U_{k_0}$, $\tau_i(k) \leq k - 1$ ($i = 1, \dots, m$), τ_i არაკლებადი ფუნქციებია და სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{j=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(j) = c_i > 0, \quad (i = 1, \dots, m) . \quad (2.1)$$

მაშინ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \frac{\sum_{i=1}^m u(\tau_i(k))}{u(k)} \leq \frac{4}{c_0^2} , \quad (2.2)$$

სადაც,

$$c_0 = \min\{c_i : i = 1, \dots, m\} . \quad (2.3)$$

დამტკიცება. (2.1)-ის თანახმად, ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, c_0)$ -თვის არსებობს $k_1 \in N_{k_1}$, ისეთი, რომ

$$u(\tau_i(k)) > 0, \quad \sum_{j=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(j) \geq c_i - \varepsilon, \quad (i = 1, \dots, m), \quad \text{როცა } k \in N_{k_1} . \quad (2.4)$$

ამიტომ (1.11)-დან გვაქვს

$$\Delta u(k) = - \sum_{i=1}^m p_i(k) u(\tau_i(k)) \leq 0$$

და ამრიგად u არის არაზრდადი ფუნქცია.

ვთქვათ $k \in N_{k_1}$ არის ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, მაშინ (2.1)-ის თანახმად არსებობს $k_i^* \geq k$ ისეთი, რომ

$$\sum_{j=k}^{k_i^*-1} p_i(j) < \frac{c_i - \varepsilon}{2} \quad \text{და} \quad \sum_{j=k}^{k_i^*} p_i(j) \geq \frac{c_i - \varepsilon}{2} . \quad (2.5)$$

(თუ (2.5)-ში $p_i(k) \geq \frac{c_i - \varepsilon}{2}$ მაშინ, იგულისხმება, რომ $k_i^* = k$ და $\sum_{j=k}^{k_i^* - \varepsilon} p_i(j) = 0$).

ჩვენ ეხლა შევეცდებით, ვაჩვენოთ, რომ $\tau_i(k_i^*) \leq k - 1$, თუ $p_i(k) \geq \frac{c_i - \varepsilon}{2}$. რადგან $k_i^* = k$ ამიტომ $\tau_i(k_i^*) = \tau_i(k) \leq k - 1$. იმ შემთხვევაში, როცა $p_i(k) \leq \frac{c_i - \varepsilon}{2}$, გვაქვს $k_i^* > k$. დავუშვათ, რომ $\tau_i(k_i^*) > k - 1$, მაშინ გვაქვს $\tau_i(k) < k \leq \tau_i(k_i^*) < k_i^*$ და

$$\sum_{j=\tau_i(k_i^*)}^{k_i^*-1} p_i(j) \leq \sum_{j=k}^{k_i^*-1} p_i(j) \leq \frac{c_i - \varepsilon}{2}.$$

რაც ეწინააღმდეგება (2.4) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ

$\tau_i(k_i^*) \leq k - 1$. (2.5)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\sum_{j=\tau_i(k_i^*)}^{k-1} p_i(j) = \sum_{j=\tau_i(k_i^*)}^{k_i^*-1} p_i(j) - \sum_{j=k}^{k_i^*-1} p_i(j) \geq c_i - \varepsilon - \frac{c_i - \varepsilon}{2} = \frac{c_i - \varepsilon}{2}, \quad (2.6)$$

თუ მოვახდენთ (1.5) განტოლების აჯამვას $k -$ დან $k_i^* -$ მდე და გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ u არის არაზრდადი, ხოლო τ_i არის არაკლებადი ფუნქციები, ამიტომ (2.5)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\begin{aligned} u(k) - u(k_i^* + 1) &= \\ \sum_{j=k}^{k_i^*} \sum_{l=1}^m p_l(j) u(\tau_l(j)) &= \\ \sum_{l=1}^m \sum_{j=k}^{k_i^*} p_l(j) u(\tau_l(j)) &\geq \sum_{l=1}^m (u(\tau_l(k_i^*))) (\sum_{j=k}^{k_i^*} p_l(j)) \geq \\ \frac{c_0 - \varepsilon}{2} \sum_{l=1}^m u(\tau_l(k_i^*)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

მეორეს მხრივ, თუ (1.5)-ს ავჯამავთ $\tau_l(k_i^*) -$ დან $k - 1 -$ მდე (2.6)-ის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} u(\tau_l(k_i^*)) - u(k) &= \\ &= \sum_{j=\tau_l(k_i^*)}^{k-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) u(\tau_i(j)) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=\tau_l(k_i^*)}^{k-1} p_i(j) u(\tau_i(j)) \\ &\geq \sum_{i=1}^m (u(\tau_i(k - 1))) \sum_{j=\tau_l(k_i^*)}^{k-1} p_i(j) \geq \frac{c_0 - \varepsilon}{2} \sum_{i=1}^m u(\tau_i(k - 1)). \end{aligned}$$

ამრიგად

$$\sum_{l=1}^m u(\tau_l(k_i^*)) \geq c_0 \sum_{i=1}^m u(\tau_i(k-1)).$$

ამიტომ (2.7)-დან გვექნება

$$u(k) \geq \frac{c_0 - \varepsilon}{2} \times \frac{c_0}{2} \sum_{i=1}^m u(\tau_i(k-1)).$$

მაშასადამე, ε -ის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ

$$\frac{\sum_{i=1}^m u(\tau_i(k-1))}{u(k)} \leq \frac{4}{c_0^2}.$$

რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ლემა 2.2. ვთქვათ, u არის შემდეგი განტოლის

$$\Delta u(k) + p(k)u(\tau(k)) = 0 \quad (2.8)$$

დადებითი ამონახსნი, სადაც $p: N \rightarrow R_+$, $\tau(k) \leq k-1$, τ არის არაკლებადი და

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{j=\tau(k)}^{k-1} p(j) = \delta > 0. \quad (2.9)$$

მაშინ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(k) \exp \left(\lambda \sum_{j=1}^{k-1} P(j) \right) = +\infty, \quad \text{ნებისმიერი } \lambda > \frac{4}{\delta^2}. \quad (2.10)$$

დამტკიცება. (2.1) ლემის თანახმად ცხადია, რომ ნებისმიერი $\gamma > \frac{4}{\delta^2}$ -თვის არსებობს $k \in N_{k_0}$, ისეთი, რომ

$$\frac{u(\tau(k_0))}{u(k)} \leq \gamma, \quad \text{როცა } k \in N_{k_1}, \quad (2.11)$$

გარდა ამისა ნებისმიერი $n \in N_{k_1}$ -თვის

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_1}^n \frac{\Delta u(k)}{u(k+1)} &= \sum_{k=k_1}^n \left(1 - \frac{u(k)}{u(k+1)} \right) \\
&= (n - k_1 + 1) \\
&\quad - \sum_{k=k_1}^n \exp\left(\ln \frac{u(k)}{u(k+1)}\right) \\
&\leq (n - k_1 + 1) - \sum_{k=k_1}^n \left(1 + \ln \frac{u(k)}{u(k+1)} \right) = - \sum_{k=k_1}^n \ln \frac{u(k)}{u(k+1)} = \ln \frac{u(n+1)}{u(k_1)}.
\end{aligned}$$

ამრიგად (2.11)-ის თანახმად შემდეგი ტოლობიდან

$$\sum_{k=k_1}^n \frac{\Delta u(k)}{u(k+1)} = - \sum_{k=k_1}^n P(k) \frac{u(\tau(k))}{u(k_1)}$$

ჩვენ მივიღებთ

$$u(n+1) \geq u(k_1) \exp\left(-\gamma \sum_{k=k_1}^n P(k)\right).$$

(2.9)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\sum_{j=1}^{+\infty} p(j) = +\infty.$$

მაშასადამე, თუ $\lambda > \frac{4}{\gamma^2}$ მაშინ, სრულდება (2.10) პირობა. რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ეხლა განვიხილოთ შემდეგი სხვაობიანი უტოლობა

$$\Delta u(k) + q(k)u(\sigma(k)) \leq 0, \quad (2.12)$$

სადაც

$$q: N \rightarrow R_+, \quad \sigma: N \rightarrow N \quad \text{და} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma(k) = +\infty. \quad (2.13)$$

ლემა 2.3. ვთქვათ სრულდება (2.9) პირობა, საკმაოდ დიდი k -სთვის

$$\tau(k) \leq k-1, \quad \sigma(k) \leq \tau(k), \quad q(k) \geq p(k), \quad (2.14)$$

და $u: N_{k_0} \rightarrow (0, +\infty)$ არის (2.12)-ის წესიერი დადებითი ამონახსნი, მაშინ არსებობს $k_1 \in N_{k_0}$ და განტოლების ამონახსნი $u_*: N_{k_1} \rightarrow (0, +\infty)$ ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$0 < u_*(k) \leq u(k), \quad \text{როცა } k \in N_{k_1}. \quad (2.15)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $u: N_{k_0} \rightarrow (0, +\infty)$ არის უტოლობის დადებითი ამონახსნი, მაშინ (2.9) და (2.13)-ის თანახმად არსებობს $k_1 > k_0$ ისეთი, რომ

$$\sum_{j=\tau(k)}^{k-1} p(j) > 0, \quad u(\sigma(k)) > 0 \quad \text{როცა } k \in N_{k_1}, \quad (2.16)$$

(2.12)-დან გვაქვს

$$u(k) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} q(j)u(\sigma(j)), \quad \text{როცა } k \geq k_1, \quad (2.17)$$

ვთქვათ, $k_* = \min\{\tau(k): k \geq k_1\}$ და $u_j: N_{k_*} \rightarrow (0, +\infty) \quad (j = 1, 2, \dots)$ არის შემდეგნაირად განსაზღვრული

$$u_1(k) = u(k), \quad \text{როცა } k \geq k_*$$

$$u_i(k) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{+\infty} p(j)u_{j-1}(\tau(j)) & \text{როცა } k \geq k_1 \\ u(k) & \text{როცა } k \in [k_*, k_1] \quad (i = 2, 3, \dots). \end{cases} \quad (2.18)$$

(2.14), (2.17)-ის თანახმად თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ u არის არაზრდადი ფუნქცია, ჩვენ მივიღებთ,

$$u_2(k) = \sum_{j=k}^{+\infty} p(j)u_1(\tau(j)) \leq \sum_{j=k}^{+\infty} q(j)u(\sigma(j)) \leq u(k) = u_1(k), \quad \text{როცა } k \geq k_1.$$

მაშასადამე

$$u_j(k) \leq u_{j-1}(k) \leq u(k), \quad \text{როცა } k \in N_{k_1} \quad (j = 2, 3, \dots). \quad (2.19)$$

აღვნიშნოთ

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} u_j(k) = u_*(k).$$

(2.19)-ის თანახმად ეს ზღვარი არსებობს, მაშასადამე, (2.18)-დან გვექნება

$$u_*(k) = \sum_{j=k}^{+\infty} p(j)u_*(\tau(j)), \quad \text{როცა } k \in N_{k_1}, \quad (2.20)$$

ამრიგად (2.20)-ის თანახმად ცხადია, რომ u_* არის (2.8) განტოლების ამონახსნი და

$$0 \leq u_*(k) \leq u(k), \quad \text{როცა } k \in N_{k_1},$$

ეხლა ვაჩვენოთ, რომ $u_*(k) > 0$ როცა $k \in N_{k_1}$,

დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაშინ არსებობს $k_2 \geq k_1$ ისეთი, რომ

$$u_*(k) = 0 \quad \text{როცა } k \in N_{k_2} \quad \text{და} \quad u_*(k) > 0 \quad \text{როცა } k \in [k_1, k_2]. \quad (2.21)$$

აღვნიშნოთ N^* -ით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$\tau(k) \geq k_2 \quad \text{და} \quad k^* = \min N^*.$$

ცხადია, რომ $k^* \geq k_2$, ამრიგად, (2.9), (2.20) და (2.21)-ის თანახმად

$$0 = u_*(k_2) = \sum_{j=k_2}^{+\infty} p(j)u_*(\tau(j)) = \sum_{j=\tau(k^*)}^{+\infty} p(j)u_*(\tau(j)) \geq \sum_{j=\tau(k^*)}^{k^*} p(j)u_*(\tau(j)) * \alpha \sum_{j=\tau(k^*)}^{k^*-1} p(j) > 0,$$

სადაც, $\alpha = \min\{u_*(\tau(j)): \tau(k^*) \leq j \leq k^* - 1\} > 0$ მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ლემა 2.4. ვთქვათ, $k_0 \in N$ და $u: N_{k_0} \rightarrow (0; +\infty)$ არის (2.8) განტოლების ამონახსნი $\tau(k) \leq k - 1$ და სრულდება (2.9) პირობა. მაშინ, ნებისმიერი $\lambda > \frac{4}{\gamma^2}$ -თვის სრულდება (2.10) პირობა.

დამტკიცება. რადგან, $u: N_{k_0} \rightarrow (0; +\infty)$ არის (2.8) განტოლების დადებითი ამონახსნი ამიტომ, ცხადია, რომ u წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის ამონახსნს

$$\Delta u(k) + p(k)u(\sigma(k)) \leq 0, \quad \text{როცა } k \in N_{k_1},$$

სადაც $k_1 > k_0$ საკმარის დიდი რიცხვია

$$\sigma(k) = \max\{\tau(i): 1 \leq i \leq k, i \in N\}.$$

ცხადია, σ არის არაკლებადი ფუნქცია.

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{j=\sigma(k)}^{k-1} p(j) = \gamma. \quad (2.22)$$

დავუშვათ, რომ (2.22) არ სრულდება. მაშინ, იარსებებს ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ისეთი, რომ $\sigma(k_i) \neq \tau(k_i)$ და

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p(i) = \gamma_1 < \gamma. \quad (2.23)$$

ამგვარად, σ ფუნქციის განმარტების თანახმად თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\sigma(k_i) \neq \tau(k_i)$ ნებისმიერი k_i -თვის არსებობს $k'_i < k_i$ ისეთი, რომ $\sigma(k) = \sigma(k_i)$ როცა $k'_i \leq k \leq k_i$. $\lim_{i \rightarrow +\infty} k'_i = +\infty$ და $\sigma(k'_i) = \tau(k_i)$. ამრიგად

$$\sum_{j=\tau(k'_i)}^{k'_i-1} p(j) = \sum_{j=\sigma(k'_i)}^{k'_i-1} p(j) = \sum_{j=\sigma(k_i)}^{k'_i-1} p(j) \leq \sum_{j=\sigma(k_i)}^{k_i-1} p(j) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

(2.23) ის თანახმად, გვაქვს

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \inf \sum_{j=\tau(k_i)}^{k'_i-1} p(j) \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf \sum_{j=\sigma(k_i)}^{k_i-1} p(j) = \gamma_1 < \gamma.$$

მივიღებთ წინააღმდეგობას ე.ი.სრულდება (2.22) პირობა (2.3) ლემის თანახმად განტოლებას

$$\Delta u(k) + p(k)u(\sigma(k)) = 0$$

გააჩნია u_* ამონახსნი რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$0 < u_*(k) \leq u(t) \text{ როცა } k \in N_{k_1}, \quad (2.24)$$

სადაც, $k_1 > k_0$ -საკმაოდ დიდი ნატურალური რიცხვია. ამრიგად, თუ მივიღებთ მხედველობაში σ ფუნქციის არაკლებადობას, ლემა 2.2-ის თანახმად გვაქვს :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_*(k) \exp \left(\lambda \sum_{i=1}^{k-1} p(i) \right) = +\infty,$$

სადაც, $\lambda > \frac{4}{\gamma^2}$. მაშასადამე, (2.24) ის თანახმად მივიღებთ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(k) \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^{k-1} p(i) \right\} = +\infty$$

ნებისმიერი $\lambda > \frac{4}{\gamma^2}$, რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ლემა 2.5. ვთქვათ, $\varphi, \psi: N \rightarrow (0; +\infty)$, ψ არაზრდადია და

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(k) = +\infty, \quad (2.25)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \psi(k) \tilde{\varphi}(k) = 0, \quad (2.26)$$

სადაც, $\tilde{\varphi}(k) = \inf \{ \varphi(s) : s \geq k, s \in N \}$. მაშინ, იარსებებს არაკლებადი მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} k_i = +\infty, \tilde{\varphi}(k_i) = \varphi(k_i), \quad \psi(k) \tilde{\varphi}(k) \geq \psi(k_i) \tilde{\varphi}(k_i) \quad (k = 1, 2, \dots, k_i = 1, 2, \dots).$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლეები $E_i (i = 1, 2)$ შემდეგნაირად:

$$k \in E_1 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k),$$

$$k \in E_2 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(s) \psi(s) \geq \tilde{\varphi}(k) \psi(k) \quad \text{როცა } s \in \{1, \dots, k\}.$$

(2.25) და (2.26) -ის თანახმად, ცხადია, რომ $\sup E_i = +\infty (i = 1, 2)$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\sup E_1 \cap E_2 = +\infty. \quad (2.27)$$

ვთქვათ, $k_0 \in E_2$ ისეთია, რომ $k_0 \notin E_1$. (2.25)-ის თანახმად, არსებობს $k_1 > k_0$ ისეთი, რომ $\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varphi}(k_1)$, როცა $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k$ და $\tilde{\varphi}(k_1) = \varphi(k_1)$. რადგან ψ არის არაზრდადი, ამიტომ გვექნება

$$\tilde{\varphi}(k) \psi(k) \geq \tilde{\varphi}(k_1) \psi(k_1) \quad \text{როცა } k = 1, \dots, k_1.$$

მაშასადამე, $k_1 \in E_1 \cap E_2$ საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, იმ ფაქტს, რომ $\sup E_i = +\infty (i = 1, 2)$. ცხადია, რომ სრულდება (2.27) პირობა.

ლემა 2.6 (აბელის გარდაქმნა). ვთქვათ, $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$, და $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$, არის არაუარყოფითი მიმდევრობები

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty. \quad (2.28)$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i = A_1 b_1 - A_{k+1} b_{k+1} - \sum_{i=1}^k A_{i+1} (b_i - b_{i+1}), \quad (2.29)$$

სადაც

$$A_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j.$$

დამტკიცება. რადგან (2.28) სრულდება ამიტომ გვაქვს

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k A_{i+1} (b_i - b_{i+1}) &= \sum_{i=1}^k A_{i+1} b_i \\ &- \sum_{i=2}^{k+1} A_i b_i = A_2 b_1 - A_{k+1} b_{k+1} + \sum_{i=2}^k (A_{i+1} - A_i) b_i = A_2 b_1 - A_{k+1} b_{k+1} - \sum_{i=2}^k a_i b_i \\ &= A_1 b_1 - A_{k+1} b_{k+1} - \sum_{i=1}^k a_i b_i. \end{aligned}$$

მაშასადამე

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i = A_1 b_1 - A_{k+1} b_{k+1} - \sum_{i=1}^k A_{i+1} (b_i - b_{i+1}).$$

ამიტომ, ცხადია (2.29) ტოლობის სამართლიანობა.

2.1-2.7 ლემებიდან გამომდინარეობს

ლემა 2.7. ვთქვათ, სრულდება 2.1 ლემის პირობები, $u \in U_{k_0}$, მაშინ ნებისმიერი $\lambda > \frac{4}{c_0^2}$, -
თვის

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(k) \exp \left(\lambda \sum_{j=1}^{+\infty} p_i(j) \right) = +\infty. \quad (2.30)$$

ლემა 2.8. ვთქვათ სრულდება შემდეგი პირობები

$$\tau_i: N \rightarrow N, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_i(k) = +\infty, \quad \tau_i(k) \leq k-1 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.31)$$

მაშინ არსებობს არაკლებადი ფუნქცია $\sigma: N \rightarrow N$ ისეთი, რომ

$$1) \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma(k) = +\infty,$$

$$2) \sigma(k) \leq \min \{ \tau_i(k) : i = 1, \dots, m \},$$

$$3) \sigma(N_k) \supset \bigcup_{i=1}^m \tau_i(N_k) \text{ ნებისმიერი } k \in N\text{-თვის.}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ, რიცხვთა მიმდევრობა

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2m}, \dots\} = (\tau_1(1), \dots, \tau_m(1), \tau_1(2), \dots, \tau_m(2), \dots)$$

და τ -თი აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $\tau: N \rightarrow A$ (2.31)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau(k) = +\infty \text{ და } \tau(N_k) \supset \tau_i(N_k) \text{ } i = 1, 2, \dots, m \text{ ნებისმიერი } k \in N\text{-თვის} \quad (2.32)$$

შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$s \in A_1 \Leftrightarrow s \in N, \tau(s) = \inf \{ \tau(k) : k \in N \}$$

$$s \in A_j \Leftrightarrow s \in N, \tau(s) = \inf \{ \tau(k) : k \in N \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \} \quad j = 2, 3, \dots$$

$$\text{აღვნიშნოთ } \xi_j = \max A_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, \quad \xi_1^0 = \xi_1, \quad \xi_j^0 = \max \{ \xi_j, \xi_{j-1}^0 + 1 \}, \quad j = 2, 3, \dots$$

ავაგოთ σ ფუნქცია შემდეგნაირად $\sigma(k) = \tau(\xi_1)$ როცა

$$1 \leq k \leq \xi_1^0, \quad \sigma(k) = \tau(\xi_j) \text{ როცა } \xi_{j-1}^0 < k \leq \xi_j^0, \quad j = 2, 3, \dots \sigma$$

ფუნქცია σ რომელიც ზემოთ ავაგეთ, ცხადია არაკლებადია და აკმაყოფილებს 1) და 2)

პირობებს. ჩვენ აგრეთვე გვაქვს $\sigma(N_k) \supset \tau(N_k)$ ნებისმიერი $k \in N$ -თვის. მაშასადამე, (2.32)-ის თანახმად ცხადია სრულდება 3) პირობა, რაც ამტკიცებებს ლემის სამართლიანობას.

შენიშვნა 2.1. ვთქვათ

$$\tau_i: N \rightarrow N, \quad \tau_i(k) \leq k - 1 \quad \text{და} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \sum_{s=\tau_i(k)}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^m p_i(s) \right) < +\infty. \quad (2.33)$$

მაშინ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \sum_{s=\sigma(k)}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^m p_i(s) \right) < +\infty, \quad (2.34)$$

სადაც σ ფუნქცია მოცემულია 2.8 ლემაში.

3. დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები

თეორემა 3.1. ვთქვათ, სრულდება (2.1) და (2.2) პირობები, რომელიმე $k_0 \in N$ -თვის $U_{k_0} \neq \emptyset$, მაშინ არსებობს $\lambda \in \left[1, \frac{4}{c_0^2}\right]$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup (\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \exp (\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \sum_{j=k}^{+\infty} p_i(j) \exp (-(\lambda + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(l)-1} p(l))) \leq 1, \quad (3.1)$$

სადაც

$$p(k) = \sum_{i=1}^m p_i(k), \quad c_0 = \min \left\{ \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{s=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(s) : i = 1, \dots, m \right\}. \quad (3.2)$$

დამტკიცება. რადგან, $U_{k_0} \neq \emptyset$, ამიტომ, (1.11) განტოლებას გააჩნია დადებითი ამონახსნი $u: N_{k_0} \rightarrow (0; +\infty)$. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup u(k) \exp \left(\sum_{j=1}^{k-1} p(j) \right) < +\infty, \quad (3.3)$$

სადაც p ფუნქცია მოცემულია (3.2) ტოლობით.

მართლაც, ვთქვათ $k_1 \in N_{k_0}$, მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned} \sum_{j=k_1}^k \frac{\Delta u(j)}{u(j)} &= \sum_{j=k_1}^k \frac{u(j+1)}{u(j)} - (k - k_1 + 1) = \sum_{j=k_1}^k e^{\ln \frac{u(j+1)}{u(j)}} - (k - k_1 + 1) \\ &\geq \sum_{j=k_1}^k \left(1 + \ln \frac{u(j+1)}{u(j)} \right) - (k - k_1 + 1) \\ &= \sum_{j=k_1}^k \ln \frac{u(j+1)}{u(j)} = \ln \frac{u(k+1)}{u(k_1)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

მეორე მხრივ თუ u ფუნქციის არაზრდადობას გავითვალისწინებთ (1.11) გატოლებიდან მივიღებთ

$$\sum_{j=k_1}^k \frac{\Delta u(j)}{u(j)} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=k_1}^k p_i(j) \frac{u(\tau_i(j))}{u(j)} \leq - \sum_{j=k_1}^k p(j).$$

ამრიგად, (3.4)- ის თანახმად

$$\ln \frac{u(k+1)}{u(k_1)} \leq - \sum_{j=k_1}^k p(j) \quad , \text{როცა } k \geq k_1.$$

ე.ო

$$u(k+1) \exp \left(\sum_{j=1}^k p(j) \right) \leq u(k_1) \exp \left(\sum_{j=1}^{k_1} p(j) \right) ,$$

როცა $k \geq k_1$. თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზედა ზღვარზე როცა $k \rightarrow +\infty$ მივიღებთ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup u(k+1) \exp \left(\sum_{j=1}^k p(j) \right) \leq u(k_1) \exp \left(\sum_{j=1}^{k_1} p(j) \right) < +\infty.$$

მაშასადამე, სრულდება (3.3) პირობა.

მეორე მხრივ 2.7 ლემის თანახმად სრულდება (2.18) მაშასადამე ნებისმიერი $\lambda > \frac{4}{c_0^2}$ -თვის სრულდება პირობა

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(k) \exp \left(\lambda \sum_{j=1}^{k-1} p(j) \right) = +\infty.$$

აღვნიშნოთ Λ -თი ყველა იმ λ -ების სიმრავლე რომელთათვისაც სრულდება პირობა

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(\tau_i(k)) \exp \left(\lambda \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j) \right) = +\infty \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.5)$$

და $\lambda_0 = \inf \Lambda$ (ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ $\Lambda \neq \emptyset$). (3.3) და (3.5) ის თანახმად ცხადია, რომ $\lambda_0 \in \left[1; \frac{4}{c_0^2}\right]$. ვაჩვენოთ, რომ როცა $\lambda = \lambda_0$ სრულდება (3.1) პირობა. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(\tau_i(k)) \exp \left((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j) \right) = +\infty \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.6)$$

მართლაც, თუ $\lambda_0 \in \Lambda$ მაშინ (3.5) -ის თანახმად ცხადია, სრულდება (3.6) პირობა. ვთქვათ, $\lambda_0 \notin \Lambda$. მაშინ λ_0 რიცხვი განმარტების თანახმად არსებობს $\lambda_k > \lambda_0$, $k = 1, 2, \dots$ ისეთი, რომ $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ როცა $k \rightarrow +\infty$ და $\lambda_k \in \Lambda$, $k = 1, 2, \dots$ და ყოველი λ_k -თვის

სრულდება (3.5) პირობა. რადგან ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$\lambda_0 < \lambda_k \leq \lambda_0 + \varepsilon.$$

ამიტომ (3.5) და (3.7)-ის თანახმად გვაქვს

$$u(\tau_i(k)) \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)) = u(\tau_i(k)) \exp(\lambda_k \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)) \times \exp(\lambda_0 + \varepsilon - \lambda_k) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j) \geq u(\tau_i(k)) \exp(\lambda_k \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)) \rightarrow +\infty \quad \text{როცა } k \rightarrow +\infty. \quad (3.7)$$

მაშასადამე, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის სრულდება (3.6) პირობა.

ანალოგიურად, ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf u(\tau_i(k)) \exp((\lambda_0 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)) = 0. \quad (3.8)$$

მართლაც, დავუშვათ, რომ რომელიმე $\varepsilon > 0$ -თვის (3.8) არ სრულდება. (2.1)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\sum_{j=1}^{+\infty} p_i(j) = +\infty \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.9)$$

მეორე მხრივ, რადგან (3.8) არ სრულდება ამიტომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf u(\tau_i(k)) \exp\{(\lambda_0 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)\} > 0. \quad (3.10)$$

ნებისმიერი $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ -თვის გვექნება

$$u(\tau_i(k)) \exp(\lambda \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)) = u(\tau_i(k)) \exp((\lambda_0 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j)) \times \exp(\lambda - (\lambda_0 - \varepsilon)) \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} p(j) \rightarrow +\infty \quad \text{როცა } k \rightarrow +\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება λ_0 რიცხვის განმარტებას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის სრულდება (3.8) პირობა. ვთქვათ, σ ფუნქცია აგებულია 2.8 ლემის

შესაზამისად, რომელიც აკმაყოფილებს 1)-3) პირობებს. (3.6) და (3.8) -ის თანახმად ცხადია, რომ ნებისმიერი ε -თვის ფუნქციები

$$\varphi(k) = u(\sigma(k)) \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\sigma(k)-1} p(j)) \quad (3.11)$$

და

$$\psi(k) = \exp(-2\varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \quad (3.12)$$

აკმაყოფილებენ 2.5 ლემის პირობებს, საკმაოდ დიდი k -ებისთვის. ამიტომ არსებობს $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\psi(k_j) \tilde{\varphi}(k_j) \leq \psi(s) \tilde{\varphi}(s), \quad \text{როცა } k^* \leq s \leq k_j, \quad (3.13)$$

$$\tilde{\varphi}(k_j) = \varphi(k_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

სადაც, k^* -საკმაოდ დიდი რიცხვია, 2.7 ლემის თანახმად რადგან

$$\sigma(N_k) \supset \bigcup_{i=1}^m \tau_i(N_k)$$

გვაქვს

$$\begin{aligned} u(\tau_i(s)) \exp\left((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(s)-1} p(j)\right) &\geq \inf(u(\tau_i(j)) \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l)) : j \geq s, j \in N) \geq \\ \inf(u(\sigma(j)) \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\sigma(j)-1} p(l)) : j \geq s) &= \tilde{\varphi}(s). \end{aligned}$$

(1.11) განტოლებიდან გვაქვს

$$\begin{aligned} u(\sigma(k_j)) &\geq \sum_{l=\sigma(k_j)}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^m p_i(l) u(\tau_i(l)) \right) = \sum_{l=\sigma(k_j)}^{+\infty} \sum_{i=1}^m p_i(l) u(\tau_i(l)) \times \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(l)-1} p(j)) \times \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(l)-1} p(j)) \geq \sum_{i=1}^m \sum_{l=\sigma(k_j)}^{+\infty} p_i(l) \tilde{\varphi}(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\tau_i(l)-1} p(j)). \end{aligned}$$

მაშასადამე

$$u(\sigma(k_j)) \geq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p_i(l) \tilde{\varphi}(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)) + \sum_{l=k_j}^{+\infty} p_i(l) \tilde{\varphi}(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)) \right).$$

აქედან, რადგან $\tilde{\varphi}$ ფუნქცია არაკლებადია, მივიღებთ

$$u(\sigma(k_j)) \geq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p_i(l) \tilde{\varphi}(l) \exp(-2\varepsilon \sum_{s=1}^{l-1} p(s)) \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{l-1} p(s)) \times \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)) + \tilde{\varphi}(k_j) \sum_{l=k_j}^{+\infty} p_i(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)) \right).$$

ამიტომ (3.13) დან გვაქვს

$$\begin{aligned} u(\sigma(k_j)) &\geq \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}(k_j) \left[\exp(-2\varepsilon \sum_{s=1}^{k-1} p(s)) \sum_{s=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p(l) \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{l-1} p(s)) \right. \\ &\quad \times \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)) + \sum_{l=k_j}^{+\infty} p(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)) \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

აღვნიშნოთ

$$I(k; \varepsilon) = \sum_{l=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p(l) \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{l-1} p(s)) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s))$$

და

$$a_l = p(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s)), \quad b_l = \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{l-1} p(s)).$$

მაშინ, 2.5 ლემის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned}
I(k_j; \varepsilon) = & \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{\sigma(k_j)} p(s)) \sum_{s=\sigma(k_j)}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(s)-1} p(s)) \\
& - \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{k_j-1} p(s)) \sum_{s=k_j}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)) \\
& + \sum_{s=\sigma(k_j)}^{k_j-1} [\exp(2\varepsilon \sum_{l=1}^{s-1} p(l)) \times \sum_{l=s+1}^{+\infty} p_i(l) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\tau_i(l)-1} p(s))],
\end{aligned} \tag{3.16}$$

სადაც, p ფუნქცია მოცემულია (3.2) -ის პირველი ტოლობით.

რადგან

$$\exp(2\varepsilon \sum_{l=1}^s p(l)) - \exp(2\varepsilon \sum_{l=1}^{s-1} p(l)) \geq 0,$$

ამიტომ (3.16)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned}
I(k_j; \varepsilon) \geq & \exp(2\varepsilon \sum_{j=1}^{\sigma(k_j)-1} p(s)) \sum_{s=\sigma(k_j)}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)) \\
& - \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{k_j-1} p(s)) \sum_{s=k_j}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)).
\end{aligned}$$

(3.11)-ის თანახმად გვქენება

$$\begin{aligned}
u(\sigma(k_j)) \geq & \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}(k_j) \exp(-2\varepsilon \sum_{s=1}^{k_j-1} p(s)) \exp(2\varepsilon \sum_{s=1}^{\sigma(k_j)-1} p(s)) \\
& \times \sum_{s=\sigma(k)}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)).
\end{aligned}$$

(3.11) და (3.14) -ის თანახმად უკანასკნელი

$$1 \geq \sum_{i=1}^m \exp(-2\varepsilon \sum_{s=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p(s)) \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{\sigma(k_j)-1} p(s)) \sum_{s=\sigma(k_j)}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)).$$

2.1 შენიშვნის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup \sum_{i=1}^m \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{\sigma(k_j)-1} p(j)) \sum_{s=\sigma(k_j)}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)) \leq \exp(2\varepsilon M),$$

სადაც

$$M = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup \sum_{s=\sigma(k_j)}^{k_j-1} p(s),$$

ხოლო p ფუნქცია მოცემულია (3.2)-ის პირველი ტოლობით. ამრიგად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის მივიღებთ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(s)) \sum_{s=k}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l)) \leq \exp(2\varepsilon M),$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{s=1}^{k-1} p(s)) \sum_{s=k}^{+\infty} p_i(s) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(s)-1} p(l))) \leq 1,$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

4. დისკრეტული განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები

მე-4 პარაგრაფში მოყვანილი იქნება (1.11) განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები, სადაც ასრებითად გამოყენებული იქნება მე-3 პარაგრაფში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.1. ვთქვათ, სრულდება (2.1) და (2.21) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in \left[1; \frac{4}{c_0^2}\right]$ სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \exp((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \sum_{i=1}^m \sum_{j=k}^{+\infty} p_i(j) \exp(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l)) \right) > 1, \quad (4.1)$$

მაშინ (1.11) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია, სადაც c_0 და p ფუნქცია მოცემულია (3.2) ტოლობებით.

დამტკიცება. დავუშვათ, $u: N_{k_0} \rightarrow (0; +\infty)$ არის (1.11) განტოლების დადებითი ამონახსნი. მაშინ $U_{k_0} \neq \emptyset$. მაშასადამე, სრულდება 3.1 თეორემის პირობები. ამიტომ, ცხადია, რომ არსებობს $\lambda_0 \in \left[1, \frac{4}{c_0^2}\right]$ ისეთი, რომ, როცა $\lambda = \lambda_0$ სრულდება (3.1) უტოლობა, რაც ეწინააღმდეგება (4.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (1.11) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.2. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (2.21) პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i(k)}{m} - \left(\prod_{i=1}^m p_i(k) \right)^{\frac{1}{m}} \right) < +\infty. \quad (4.2)$$

მაშინ იმისათვის, რომ (1.11) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი საკმარისია ნებისმიერი $\lambda \in \left[1, \frac{4}{c_0^2}\right]$ -თვის

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \exp((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \exp \left(-\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right) \right) \right) > 1, \quad (4.3)$$

სადაც, p ფუნქცია მოცემულია (3.2) -ის პირველი ტოლობით.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.1) უტოლობა.(2.21) -ის თანახმად არსებობს $k_* \in N$ და $M > 0$, ისეთი, რომ

$$\sum_{l=1}^m \left(\sum_{l=\tau_i(k)}^{k-1} p(l) \right) \leq M \quad \text{როცა} \quad k \geq k_* \quad (4.4)$$

აღვნიშნოთ

$$\rho(\varepsilon, k) = \exp \left((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j) \right) \sum_{j=k}^{+\infty} \sum_{i=1}^m p_i(j) \exp \left(-(\lambda + \varepsilon) \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right).$$

ამიტომ როცა $k \geq k_*$ თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ საშუალო არითმეტიკული მეტია ან ტოლი საშუალო გეომეტრიულზე გვექნება

$$\begin{aligned} & \rho(\varepsilon, k) \\ & \geq \exp \left((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j) \right) m \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \exp \left(- \sum_{j=1}^{k-1} p(j) \right) \\ & \times \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \exp \left(- \frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right) = \exp \left((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j) \right) m \times \sum_{j=k}^{+\infty} \left[\left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^m \frac{p_i(j)}{m} + \sum_{i=1}^m \frac{p_i(j)}{m} \right] \times \exp \left(- \frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right) \geq m \exp((\lambda + \varepsilon)) \\ & \times \sum_{j=1}^{k-1} p(j) \left(\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{p(j)}{m} - \left(\frac{p(j)}{m} - \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \right) \\ & \times \exp \left(- \frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

ამიტომ, (4.4) -ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\rho(\varepsilon; k) &\geq \exp((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \left(\sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \exp\left(-\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right)\right) - m \sum_{j=k}^{+\infty} \exp\left(\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m}\right) \right. \\
&\quad \times M \left. \exp\left(-\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{l=1}^{j-1} p(l)\right) \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i(j)}{m} - \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \right).
\end{aligned}$$

მაშასადამე

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \rho(\varepsilon; k) \right) \\
&\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \exp\left((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)\right) \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \exp\left(-\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \left(\sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l) \right)\right) \right. \\
&\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup m \exp\left(\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m}\right) M \exp\left((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)\right) \sum_{j=k}^{+\infty} \exp\left(-(\lambda + \varepsilon) \sum_{l=1}^{j-1} p(l)\right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i(j)}{m} - \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \right). \tag{4.6}
\end{aligned}$$

რადგან

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k}^{+\infty} \exp\left(-(\lambda + \varepsilon) \sum_{l=1}^{j-1} p(l)\right) \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i(j)}{m} - \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \\
&\leq \exp\left(-(\lambda + \varepsilon) \sum_{l=1}^{k-1} p(l)\right) \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i(j)}{m} - \left(\prod_{i=1}^m p_i(j) \right)^{\frac{1}{m}} \right).
\end{aligned}$$

ამიტომ (4.6) და (4.2)-ის ძალით გვექნება

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \rho(\varepsilon; k) \right) > 1.$$

ეს კი (4.5)-ის თანახმად ნიშნავს, რომ სრულდება (4.1) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.3. თუ სრულდება (2.1), (2.21), (4.2) პირობები და

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=\tau_i(k)}^{k-1} p(l) \right) > \frac{m}{e} . \quad (4.7)$$

მაშინ, (1.11) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.3) პირობა. (4.7) -ის თანახმად არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$ და $\varepsilon_0 > 0$, ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=\tau_i(k)}^{k-1} p(l) \right) > \frac{m + \varepsilon_0}{e} \quad \text{როცა } k \geq k_0 . \quad (4.8)$$

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (4.8) -ის თანახმად სრულდება (4.3) უტოლობა. მართლაც

$$\begin{aligned} \rho_1(\varepsilon; k) &= \exp((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \sum_{j=k}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\tau_i(j)-1} p(l)\right) \geq \exp((\lambda \\ &+ \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) [\exp(-(\lambda \\ &+ \varepsilon) \sum_{l=1}^{j-1} p(l)) \times \exp\left(\frac{(\lambda + \varepsilon)}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{l=\tau_i(j)}^{j-1} p(l)\right)] . \end{aligned} \quad (4.9)$$

აქედან, (4.8) -ის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \rho_1(\varepsilon; k) &\geq \exp\left((\lambda + \varepsilon) \frac{m + \varepsilon_0}{m}\right) \exp((\lambda \\ &+ \varepsilon) \sum_{j=1}^{k-1} p(j)) \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \times \exp\left(-(\lambda + \varepsilon) \sum_{l=1}^{k-1} p(l)\right) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

აღვნიშნოთ

$$\sum_{j=1}^{k-1} p(j) = a_{k-1} .$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \exp((\lambda + \varepsilon) \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \exp(-(\lambda + \varepsilon) a_{j-1})) \geq \frac{1}{\lambda + \varepsilon}. \quad (4.11)$$

მართლაც, (2.1) -ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p(i) = +\infty.$$

ე.ი.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty.$$

ამიტომ, გვაქვს

$$\begin{aligned} \exp((\lambda + \varepsilon) a_{k-1}) \sum_{j=k}^{+\infty} p(j) \exp(-(\lambda + \varepsilon) a_{j-1}) &= \exp((\lambda + \varepsilon) a_{k-1}) \times \sum_{j=k}^{+\infty} (a_j - a_{j-1}) \exp(-(\lambda + \varepsilon) a_{j-1}) \\ &= \exp((\lambda + \varepsilon) a_{k-1}) \\ &\times \sum_{j=k}^{+\infty} \exp(-(\lambda + \varepsilon) a_{j-1}) \int_{a_{j-1}}^{a_j} ds \\ &\geq \exp((\lambda + \varepsilon) a_{k-1}) \sum_{j=k}^{+\infty} \int_{a_{j-1}}^{a_j} (-(\lambda + \varepsilon) s) ds = \exp((\lambda + \varepsilon) a_{k-1}) \int_{a_{k-1}}^{+\infty} \exp(-(\lambda + \varepsilon) s) ds = \frac{1}{\lambda + \varepsilon}. \end{aligned}$$

ე.ი. სრულდება (4.10) უტოლობა. ამიტომ (4.10) -ის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \rho_1(\varepsilon; k) \geq \exp((\lambda + \varepsilon) \frac{m + \varepsilon_0}{me} \frac{1}{\lambda + \varepsilon}) \geq \frac{m + \varepsilon_0}{m}$$

მაშასადამე

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \rho_1(\varepsilon; k)) > 1,$$

რაც ამტკიცებს (4.3) უტოლობის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.4. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (2.22), პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |p_i(k) - p_j(k)| < +\infty \quad i, j = 1, \dots, m \quad (4.12)$$

მაშინ (1.11) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნის რხევადობისთვის, საკმარისია

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(j) \right) > \frac{1}{e}. \quad (4.13)$$

დამტკიცება. 4.3 თეორემის თანახმად, მოცემული თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.7) პირობა. მართლაც, (4.12)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \sum_{l=\tau_i(k)}^{k-1} p(l) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf m \sum_{i=1}^m \sum_{j=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(j)$$

ამიტომ, (4.13)-ის თანახმად ცხადია, სრულდება (4.7) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შენიშვნა 4.1. შევნიშნოთ, რომ $m = 1$ -ის შემთხვევაში (4.13) პირობა არ შეიძლება შეიცვალოს არამკაცრი უტოლობით. $m \geq 2$ -ის შემთხვევაში ქვემოთ მოყვანილი მაგალითიც მიუთითებს (4.13) პირობის სიზუსტეზე.

მაგალითი 4.1. ვთქვათ, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0; +\infty)$, $\alpha_i \in (0; 1)$, $(i = 1, \dots, m)$ განვიხილოთ განტოლება (1.11), სადაც $\tau_i(k) = [\alpha_i k]$,

$$p_i(k) = \frac{k^{-\lambda} - (k+1)^{-\lambda}}{[\alpha_1 k]^{-\lambda} + \dots + [\alpha_m k]^{-\lambda}}, \quad (4.14)$$

ცხადია, რომ

$$k^{1+\lambda}(k^{-\lambda} - (k+1)^{-\lambda}) \rightarrow \lambda \quad \text{როცა } k \rightarrow +\infty. \quad (4.15)$$

(4.14) და (4.15) -ის თანახმად მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(j) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=[\alpha_i k]}^{k-1} \frac{j^{-\lambda} - (j+1)^{-\lambda}}{[\alpha_1 j]^{-\lambda} + \dots + [\alpha_m j]^{-\lambda}} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=[\alpha_i k]}^{k-1} \frac{j(j^{-\lambda} - (j+1)^{-\lambda})}{[\alpha_1 j]^{-\lambda} + \dots + [\alpha_m j]^{-\lambda}} \times \frac{1}{j} \right) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha_1^{-\lambda} + \dots + \alpha_m^{-\lambda}} \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=[\alpha_i k]}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha_1^{-\lambda} + \dots + \alpha_m^{-\lambda}} \ln \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_m} . \tag{4.16}
\end{aligned}$$

მეორე მხრივ

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{\alpha_1^{-\lambda} + \dots + \alpha_m^{-\lambda}} \ln \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_m} \\
&\leq \frac{\frac{\lambda}{m}}{(\alpha_1 \dots \alpha_m)^{-\frac{\lambda}{m}}} \ln \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_m} \\
&= \frac{\lambda}{m} (\alpha_1 \dots \alpha_m)^{-\frac{\lambda}{m}} \ln \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_m} . \tag{4.17}
\end{aligned}$$

რადგან

$$\max \frac{\lambda}{m} (\alpha_1 \dots \alpha_m)^{-\frac{\lambda}{m}} \ln \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \frac{1}{e}$$

და ეს მაქსიმუმი მიიღწევა

$$\lambda = -\frac{m}{\ln \alpha_1 \dots \alpha_m}$$

წერტილში (4.16) და (4.17) -ის თანახმად ცხადია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\frac{1 - \varepsilon}{e} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=\tau_i(k)}^{k-1} p_i(j) \right) \leq \frac{1}{e}$$

როცა

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_1 - \alpha_i| < \delta .$$

მეორე მხრივ $k^{-\lambda}$, სადაც $\lambda = -\frac{m}{\ln \alpha_1 \dots \alpha_m}$, წარმოადგენს (1.11) განტოლების დადებით ამონახსნს, სადაც τ_i და p_i ფუნქციები მოცემულია (4.14) ტოლობებით.

შენიშვნა 4.1. როცა $m = 1$, (4.17) –ში ადგილი აქვს ტოლობას. ამიტომ ამ შემთხვევაში მუდმივი $\frac{1}{e}$ ოპტიმალურია.

დასკვნა

ნაშრომი ეხება დისკრეტული განტოლების ამონახსნების ყოფაქცევის შესწავლას უსასრულობის მიდამოში. შრომა შედგება შესავალისა და სამი პარაგრაფისაგან. შესავალში მოყვანილია მოკლე მიმოხილვა აღნიშნულ საკითხებთან დაკავშირებით და ჩამოყალიბებულია ზოგიერთი ცნობილი შედეგი, როგორც ფუნქციონალურ, ასევე დისკრეტული განტოლების შემთხვევაში. მეორე პარაგრაფში შესწავლილია ზოგიერთი დამხმარე ლემა, რომლებსაც არსებითი მნიშვნელობა აქვთ ძირითადი შედეგების მისაღებად. მესამე პარაგრაფში განხილულია დისკრეტული განტოლებები მრავალი დაგვიანებით და მოყვანილია დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები. მეოთხე პარაგრაფი წარმოადგენს მოცემული ნაშრომის ძირითად შედეგებს. დადგენილია მოცემული განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები. ბოლოს მოყვანილია მაგალითები იმის საილუსტრაციოდ, რომ მიღებული შედეგები გარკვეული აზრით ოპტიმალურია.

ლიტერატურა

1. А.Д. Мышкис, Линейныи дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Изд. Наука, 1972.
2. A.Elbert and I.P.stavroulakis, Oscillation and nonoscillation criteria for delay differential equations. Proc. Amer, Math. Soc 123:5 (1995), 1503-1510.
3. R.koplatadze and T.Chanturia, Oscillating and monotone solutions of first order differential equations with deviating argument, 18:8 (1982), 1463-1465.
4. G.Chatzarakis, R.Koplatadze and I.Stavroulakis, Optimal oscillation criteria for first order difference equations with deviating argument. Pacific Journal of Math. vol. 235 (2008), 15-33.
5. R.Koplatadze ,M.Gramatikopoulous and I.stavroulakis, ON the oscillation of solutions of first order differencial equations with retarded argument. vol. 10 (2003) 63-76.
6. G.Jadas. Ch.Philos, and Y.G.Sficas, Sharp conditions for the oscillations of delay difference equations. Journal of Applied Mathematics and Simulations 2, (1989) 101-112.