

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნინო მარანელი

ფუნქციონალურ დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების
ოსცილაციური თვისებების შესახებ

**On Oscillatory Properties of Solutions of Functional Differential
Equations**

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2013

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

გადახრილ არგუმენტიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$u^{(n)}(t) + p(t)|u(\sigma(t))|^\lambda \operatorname{sign} u(\sigma(t)) = 0,$$

სადაც

$$\lambda > 0, \quad \lambda \neq 1, \quad p \in C(R_+; R_+), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty,$$

შესწავლილია ამონახსნების ოსცილაციური თვისებები. კერძოდ, დადგენილია საკმარისი (აუცილებელი და საკმარისი) პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნდეს ე.წ. A თვისება.

A b s t r a c t

In this work the nonlinear differential equation with deviating argument

$$u^{(n)}(t) + p(t)|u(\sigma(t))|^\lambda \operatorname{sign} u(\sigma(t)) = 0,$$

are considered, where

$$\lambda > 0, \quad \lambda \neq 1, \quad p \in C(R_+; R_+), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty,$$

Namely, sufficient (necessary and sufficient) conditions are established for a nonlinear functional differential equations to have Property A.

ს ა რ ზ ე ვ ი

შესავალი	4
1. ზოგიერთი დამხმარე ლემა.	6
2. წინწასწრებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის	
(1.1 _l) ტიპის ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები	9
3. (1.1 _l) ტიპის ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები	
წინწასწრებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისვის	14
4. წინწასწრებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები	
A თვისებით	18
5. აუცილებელი და საკმარისი პირობები	22
6. დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები	24
7.(1.1 _l) ტიპის ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები	29
8. დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები A თვისებით	32
დასკვნა	35
ლიტერატურა	36

შესავალი

ჯერ კიდევ გასული საუკუნის 50-იან წლებში დაიწყო ჩვეულებრივი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლა. ემდენ-ფაულერის მიერ შესწავლილი იყო მეორე რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როცა მოცემული განტოლების კოეფიციენტები იყო ხარისხოვანი ფუნქციები. ამ განტოლებათა შესწავლა განპირობებული იყო, ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანებით, კერძოდ, ფიზიკის, ბიოლოგიის და სხვა. ეს შედეგები მოყვანილია დ. სანსონეს ცნობილ მონოგრაფიაში [1].

1960-იან წლებში ინტენსიურად დაიწყო მაღალი რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა კვლევა მრავალი მეცნიერის მიერ. კერძოდ, ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებებისათვის ამონახსნების ოსცილაციური თვისებები შესწავლილი იყო ატკინსონის [2], მიკუსინსკის [3], კილურადის და ჭანტურიას [4] და სხვა შრომებში.

ჩვენს მიერ შესწავლილი იქნება, მაღალი რიგის წინწასწრებულ არგუმენტიანი და დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები, სადაც მიღებულია განსხვავებული ტიპის შედეგები, ვიდრე ეს იყო მოცემული [5-6] შრომებში.

მოცემულ შრომაში შესწავლილი იქნება შემდეგი დიფერენციალური განტოლების

$$u^n(t) + p(t)|u(\sigma(t))|^{\lambda} \operatorname{sign} u(\sigma(t)) = 0 \quad (1.1_0)$$

ამონახსნების ოსცილაციური თვისებები, სადაც

$$p \in C(R_+, R_+), \quad \sigma \in C(R_+; R), \sigma(t) \geq t \text{ როცა } t \in R_+ \text{ და } \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty. \quad (1.2_0)$$

ვთქვათ, $t_0 \in R_+$, ფუნქციას $u: [t_0, +\infty) \rightarrow R$, ვუწოდებთ (1.1₀) განტოლების წესიერ ამოხსნას, თუ ის უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად n რიგის ჩათვლით ყველგან $[t_0, +\infty)$, აკმაყოფილებს (1.1₀) განტოლებას და სრულდება პირობა

$$\sup\{|u(s)|: s \geq t\} > 0 \text{ როცა } t \geq t_0.$$

(1.1₀) განტოლების $u: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ ამონახსნს ეწოდება რხევადი, თუ მას გააჩნია ნულების მიმდევრობა კრებადი $+\infty$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ეწოდება არარხევადი.

განმარტება 1.1. ვიტყვი, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება, თუ ლუწი n -ის შემთხვევაში მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია, ხოლო კენტი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს პირობას:

$$|u^{(i)}(t)| \downarrow 0 \quad \text{როცა} \quad t \uparrow +\infty \quad (i = 0, \dots, n-1) \quad (1.3_0)$$

(1.1₀) განტოლების ოსცილაციური თვისებები შესწავლილი იყო სხვადასხვა ავტორების მიერ, მაგ. იხ. [5]. ჩვენს მიერ შესწავლილი იქნება როგორც წინწასწრებულ არგუმენტიანი ($\sigma(t) \geq t$), ასევე დაგვიანებულ არგუმენტიანი ($\sigma(t) \leq t$) (1.1₀) სახის დიფერენციალური განტოლება. კერძოდ, დადგენილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნდეს A თვისება.

1. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

პირველ პარაგრაფში დადგენილი იქნება მონოტონური ფუნქციების თვისებები, რასაც დიდი მნიშვნელობა აქვს იმისათვის, რომ შემდეგ პარაგრაფებში შესწავლილი იქნეს გადახრილ არგუმენტებიანი ემდენ-ფაულერის განტოლებათა ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა.

ქვემოთ ყველგან $C^{(n)}([t_0, +\infty))$ აღვნიშნავთ $u: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად n რიგის ჩათვლით $[t_0, +\infty)$ შუალედზე.

ლემა 1.1. ვთქვათ,

$$u \in C^{(n)}([t_0, +\infty)), \quad u(t) > 0, \quad u^{(n)}(t) \leq +\infty,$$

როცა $t \geq t_0$, $u^{(n)}(t) \not\equiv 0$ $+\infty$ -ის ნებისმიერ მიდამოში, მაშინ არსებობს $t_1 \geq t_0$ და $l \in \{0, \dots, n-1\}$ ისეთი, რომ $l+n$ კენტია და სრულდება შემდეგი უტოლობები

$$u^{(i)}(t) > 0, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1 \quad (i = 0, \dots, l-1),$$

$$(-1)^{i+l} u^{(i)}(t) > 0, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1 \quad (i = l, \dots, n-1). \quad (1.1_l)$$

დამტკიცება. მოცემული ლემის დამტკიცება მარტივად გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ თუ $u(t) > 0$ და $u''(t) \leq 0$, როცა $t \geq t_0$, მაშინ არსებობს $t_1 \geq t_0$ ისეთი, რომ $u'(t) > 0$, როცა $t \geq t_1$.

ლემა 1.2. ვთქვათ, $u \in C^{(n)}([t_0, +\infty))$ და რომელიმე $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის (1.1_l) სრულდება, სადაც $l+n$ კენტია, მაშინ

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1} |u^{(n)}(t)| dt < +\infty. \quad (1.2)$$

გარდა ამისა, თუ

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l} |u^{(n)}(t)| dt = +\infty \quad (1.3)$$

მაშინ არსებობს $t_* > t_0$ ისეთი, რომ

$$\frac{u^{(i)}(t)}{t^{l-i}} \downarrow, \quad \frac{u^{(i)}(t)}{t^{l-i-1}} \uparrow \quad (i = 0, \dots, l-1) \quad (1.4)$$

$$u(t) \geq \frac{t^{l-1}}{(n-l)!} u^{(l-1)}(t) \quad \text{როცა} \quad t \geq t_* \quad (1.5)$$

და

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{t}{(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} |u^{(n)}(s)| ds + \frac{1}{(n-l)!} \int_{t_*}^t s^{n-l} |u^{(n)}(s)| ds. \quad (1.6)$$

დამტკიცება. თუ მივიღებთ მხედველობაში (1.1_l)-ს, მაშინ (1.2) გამომდინარეობს ტოლობიდან

$$\sum_{j=l}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-1} u^{(j)}(t)}{(j-l)!} = \sum_{j=l}^{k-1} \frac{(-1)^j t_0^{j-i} u^{(j)}(t_0)}{(j-l)!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-i-1)!} \int_{t_0}^t s^{k-i-1} |u^{(n)}(s)| ds. \quad (1.7_{ik})$$

როცა $i = l$ და $k = n$. ამავე ტოლობიდან ცხადია (1.1_l)-ის თანახმად გამომდინარეობს უტოლობა

$$\sum_{j=l}^{n-1} \frac{t^{j-l} |u^{(j)}(t)|}{(j-l)!} \geq \frac{1}{(n-l-1)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} |u^{(n)}(s)| ds, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0. \quad (1.8)$$

ეხლა დავუშვათ, რომ სრულდება (1.3) პირობა, მაშინ თუ გამოვიყენებთ (1.1_l), (1.7_{l-1,n})-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} u^{(l-1)}(t) - tu^{(l)}(t) &= \sum_{j=l+1}^{n-1} \frac{t^{j-l+1} |u^{(j)}(t)|}{(j-l+1)!} \\ &+ \sum_{j=l-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+l-1} t_0^{j-l+1} u^{(j)}(t_0)}{(j-l+1)!} + \frac{1}{(n-l)!} \int_{t_0}^t s^{n-l} |u^{(n)}(s)| ds. \end{aligned} \quad (1.9)$$

ამრიგად, (1.9)-დან (1.3)-ის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u^{(l-1)}(t) - tu^{(l)}(t)) = +\infty. \quad (1.10)$$

ნებისმიერი $t \geq t_0$ და $i \in \{1, \dots, l\}$ -თვის აღვნიშნოთ

$$v_i(t) = iu^{(l-i)}(t) - tu^{(l-i+1)}(t) = -t^{i+1} (t^{-i} u^{(l-i)}(t))' \quad (1.11)$$

$$r_i(t) = tu^{(l-i+1)}(t) - (i-1)u^{(l-i)}(t) = t^i (t^{l-i} u^{(l-i)}(t))' \quad (1.12)$$

(1.10)-ის ძალით, თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, მივიღებთ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u^{(l-i)}(t)}{t^{l-1}} = +\infty \quad (i = 1, \dots, l).$$

მაშასადამე, თუ მივიღებთ მხედველობაში (1.12) პირობებს, არსებობს $v_l \geq \dots \geq v_1$, ისეთი, რომ $r_i(t) > 0$, $(i = 1, \dots, l)$. რადგან $r(t) = tu^{(l)}(t) > 0$ და $r'_{i+1}(t) = r_i(t)$, როცა $t \geq t_0$ $i = (1, \dots, l-1)$. ჩვენ მარტივად შევნიშნავთ, რომ $r_i(t) > 0$, როცა $t \geq v_i$. ანალოგიურად, (1.10)-ის თანახმად გვაქვს

$v_i(t) \rightarrow +\infty$, როცა $t \rightarrow +\infty$ და $v'_{i+1}(t) = v_i(t)$. ამრიგად $v_i(t) \rightarrow +\infty$ როცა $t \rightarrow +\infty$ $(i = 1, \dots, l)$. (1.11) და (1.12)-ის თანახმად მივიღებთ (1.4_l). მეორეს მხრივ, (1.11)-ის თანახმად გვაქვს

$$iu^{(l-i)}(t) \geq tu^{(l-i+1)}(t) \quad \text{საკმარისად დიდი } t - \text{სთვის } (i = 1, \dots, l),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1.5). ეხლა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (1.6) პირობა. (1.3)-ის თანახმად არსებობს $t_* > t_0$, ისეთი რომ,

$$\frac{1}{(n-l)!} \int_{t_0}^{t_*} s^{n-l} |u^{(n)}(s)| ds \geq \sum_{j=l-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+l} t_0^{j-l+1} u^j(t_0)}{(j-l+1)!},$$

ამიტომ (1.8) და (1.9)-დან გამომდინარეობს (1.6). ლემა დამტკიცებულია.

2. წინწასწრებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის (1. 1_l) ტიპის ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობა

მოცემულ პარაგრაფში მიღებული შედეგები არსებით როლს თამაშობს იმისათვის, რომ დადგენილ იქნეს საკმარისი პირობები, იმისა რომ, (1. 1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება.

განმარტება 2.1. ვთქვათ $t_0 \in R_+$, U_{l,t_0} -ით აღვნიშნოთ (1. 1₀) განტოლების იმ წესიერ ამონახსნთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1. 1_l) პირობებს.

ქვემოთ ყველგან იგულისხმება, რომ

$$p(t) \geq 0, \text{ როცა } t \in R_+. \quad (2.1)$$

თეორემა 2.1. ვთქვათ სრულდება (2.1), $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტი, $\sigma(t) \geq t$, $0 < \lambda < 1$,

$$\sigma(t) \geq t, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (2.2)$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l} (\sigma(t))^{(l-1)\lambda} p(t) dt = +\infty, \quad (2.3_l)$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1} (\sigma(t))^{\lambda l} p(t) dt = +\infty, \quad (2.4_l)$$

გარდა ამისა, თუ რომელიმე $t_0 \in R_+$ -თვის, $U_{l,t_0} \neq \emptyset$, მაშინ ნებისმიერი $k \in N$ და $\delta \in [0, \lambda]$ -თვის და $\exists \sigma_* \in C([t_0, +\infty))$ ისეთი, რომ

$$t \leq \sigma_*(t) \leq \sigma(t), \quad \text{როცა } t \geq t_0, \quad (2.3)$$

გვაქვს

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma_*(t))^{(l-1)\lambda} (\rho_{l,k}(\sigma_*(t)))^\delta dt < +\infty \quad (2.4)$$

სადაც

$$\rho_{l,1}(t) = \left(\frac{1-\lambda}{l!(n-l)!} \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} p(\xi) d\xi ds \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad (2.5)$$

$$\rho_{l,i}(t) = \left(\frac{1-\lambda}{l!(n-l)!} \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} \rho_{l,i-1}(\sigma(\xi))^\lambda p(\xi) d\xi ds \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad (2.6_l)$$

($i = 2, \dots, k$).

დამტკიცება. ვთქვათ $t_0 \in R_+$ და $U_{l,t_0} \neq \emptyset$. U_{l,t_0} -ით სიმრავლის განმარტების თანახმად (იხ. განმარტება 2.1), (1.1₀) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u \in U_{l,t_0}$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1_l). (1.1_l) და (2.3_l) თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (1.3) პირობა. ამრიგად, 1.2 ლემის თანახმად სრულდება (1.4) და (1.5) პირობები და

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{t}{(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} (u(\sigma(s)))^\lambda p(s) ds + \frac{1}{(n-l)!} \int_{t_*}^t s^{n-l} (u(\sigma(s)))^\lambda p(s) ds, \quad (2.7)$$

როცა $t \geq t_*$. (1.5)-ის თანახმად, (2.7)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} u^{(l-1)}(t) &\geq \frac{t}{(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} (u(\sigma(s)))^\lambda p(s) ds - \frac{1}{(n-l)!} \int_{t_*}^t s d \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (u(\sigma(\xi)))^\lambda p(\xi) d\xi \\ &\geq \frac{1}{(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (u(\sigma(\xi)))^\lambda p(\xi) d\xi ds \\ &\geq \frac{1}{l! (n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} (u^{(l-1)}(\sigma(\xi)))^\lambda p(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

მაშასადამე, (1.1_l)-ის ძალით, (2.8)-დან გვქეზება

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{1}{l! (n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} (u^{(l-1)}(\xi))^\lambda p(\xi) d\xi ds \quad \text{როცა } t \geq t_* \quad (2.9)$$

მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ

$$x'(t) \geq \frac{(u^{(l-1)}(t))^\lambda}{l! (n-l)!} \int_t^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} p(\xi) d\xi, \quad (2.10)$$

სადაც

$$x(t) = \frac{1}{l! (n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} p(\xi) (u^{(l-1)}(\xi))^\lambda d\xi ds. \quad (2.11)$$

ამრიგად, (2.9) და (2.11)-ის თანახმად, (2.10)-დან მივიღებთ:

$$x'(t) \geq \frac{x^\lambda(t)}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} \xi^{n-l-1}(\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} p(\xi) d\xi, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_*.$$

მაშასადამე,

$$x(t) \geq \left(\frac{1-\lambda}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1}(\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} p(\xi) d\xi ds \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_*$$

ამრიგად, (2.9) და (2.11)-ის თანახმად გვაქვს

$$u^{(l-1)}(t) \geq \rho_{t_*,l,1}(t) \quad \text{როცა} \quad t \geq t_*, \quad (2.12)$$

სადაც

$$\rho_{t_*,l,1}(t) = \left(\frac{1-\lambda}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1}(\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} p(\xi) d\xi ds \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}. \quad (2.13)$$

(2.9), (2.11) და (2.12)-ის ძალით

$$u^{(l-1)}(t) \geq \rho_{t_*,l,k}(t), \quad \text{როცა} \quad t \geq t_*, \quad (2.14)$$

სადაც

$$\rho_{t_*,l,k}(t) = \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1}(\sigma(\xi))^{(l-1)\lambda} (\rho_{t_*,l,k-1}(\sigma(t)))^\lambda p(\xi) d\xi ds, \quad (2.15)$$

$$(k = 2, 3, \dots).$$

მეორეს მხრივ, (1.1_l), (2.7) და (2.3)-ის თანახმად:

$$\begin{aligned} u^{(l-1)}(t) &\geq \frac{t}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{(l-1)\lambda} (u^{(l-1)}(\sigma(s)))^\lambda p(s) ds \\ &\geq \frac{t}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{(l-1)\lambda} (u^{(l-1)}(\sigma_*(s)))^\lambda p(s) ds \\ &= \frac{t}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{(l-1)\lambda} (\sigma_*(s))^\lambda p(s) \left(\frac{u^{(l-1)}(\sigma_*(s))}{\sigma_*(s)} \right)^\lambda ds. \end{aligned}$$

მაშასადამე, (1.4_{l-1}) და (2.3)-ის ძალით, ნებისმიერი $\delta \in [0, \lambda]$ -თვის

$$\begin{aligned}
u^{(l-1)}(t) &\geq \frac{t}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{(l-1)\lambda} p(s) \left(\frac{u^{(l-1)}(\sigma_*(s))}{\sigma_*(s)} \right)^\lambda ds \\
&\geq \frac{t}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{(l-1)\lambda} p(s) (u^{(l-1)}(\sigma_*(s)))^\delta (u^{(l-1)}(s))^{\lambda-\delta} ds
\end{aligned}$$

ე.ი. (2.14)-ის თანახმად

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{(l-1)\lambda} p(s) (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(s)))^\delta (u^{(l-1)}(s))^{\lambda-\delta} ds \quad (2.16)$$

$$t \geq t_* \quad (k = 1, 2, \dots).$$

ამრიგად თუ $\delta = \lambda$ გვაქვს

$$\int_{t_*}^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(s)))^\lambda ds \leq l!(n-l)! \frac{u^{(l-1)}(t_*)}{t_*} \leq l!(n-l)!. \quad (2.17)$$

ვთქვათ $\delta \in [0, \lambda)$. მაშინ (2.16)-დან

$$(u^{(l-1)}(t))^{\lambda-\delta} \geq \frac{t^{\lambda-\delta}}{(l!(n-l)!)^{\lambda-\delta}} \left(\int_t^{+\infty} s^{n-l-1}(\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(s)))^\delta (u^{(l-1)}(s))^{\lambda-\delta} ds \right)^{\lambda-\delta},$$

როცა $t \geq t_*$ ($k = 1, 2, \dots$).

ამრიგად მივიღებთ

$$\frac{\varphi(t)}{(\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds)^{\lambda-\delta}} \geq \frac{1}{(l!(n-l)!)^{\lambda-\delta}} t^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma(t))^{(l-1)\lambda} (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(t)))^\delta p(t)$$

როცა $t \geq t_*$ ($k = 1, 2, \dots$), სადაც

$$\varphi(t) = t^{n-l-1}(\sigma(t))^{(l-1)\lambda} (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(t)))^\delta (u^{(l-1)}(t))^{\lambda-\delta} p(t).$$

უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$-\int_{y(t_*)}^{y(s)} \frac{ds}{s^{\lambda-\delta}} \geq \frac{1}{(l!(n-l)!)^{\lambda-\delta}} \int_{t_*}^t s^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} X(\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(s)))^\delta p(s) ds,$$

სადაც

$$\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds = y(t). \quad (2.18)$$

მაშასადამე,

$$\int_{t_*}^t s^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma_*(s))^\delta p(s) ds \leq (l! (n-l)!)^{\lambda-\delta} \int_0^{y(t_*)} \frac{ds}{s^{\lambda-\delta}}. \quad (2.19)$$

(2.18)-ის თანახმად ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოდ, რომ

$y(t_*) \leq 1$. ამრიგად, (2.19)-დან

$$\int_{t_*}^t s^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(s)))^\delta p(s) ds \leq (l! (n-l)!)^{\lambda-\delta} \int_0^1 \frac{ds}{s^{\lambda-\delta}} = \frac{(l! (n-l)!)^{\lambda-\delta}}{1-\lambda+\delta}$$

როცა $t \geq t_*$.

თუ გადავალთ ზღვარზე უკანასკნელ უტოლობაში როცა $t \rightarrow +\infty$, მივიღებთ

$$\int_{t_*}^{+\infty} s^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} (\rho_{t_*,l,k}(\sigma_*(s)))^\delta ds < +\infty \quad (2.20)$$

მაშასადამე, რადგან

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\rho_{l,k}(t)}{\rho_{t_*,l,k}(k)} = 1, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

(2.20) და (2.17)-ის თანახმად, ნებისმიერი $\delta \in [0, \lambda]$ და $k \in \mathbb{N}$ -სთვის სრულდება (2.4) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

3. წინასწარებულ არგუმენტური დიფერენციალური განტოლებისათვის (1.1_l) ტიპის ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები

თეორემა 3.1. ვთქვათ, სრულდება (1.2), (2.1), (2.2), (2.3_l) და (2.4_l) პირობები, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტი და არსებობს $\delta \in [0, \lambda]$, $k \in \mathbb{N}$ და $\sigma_* \in C(R_+)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.3) პირობას ისეთი, რომ

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma(t))^{\lambda(l-1)} (\rho_{l,k}(\sigma_*(t)))^\delta p(t) dt = +\infty, \quad (3.1_l)$$

სადაც $\rho_{l,k}$ ფუნქციები განსაზღვრულია (2.5_l), (2.6_l) ტოლობით, მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის, გვაქვს $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ რომელიმე $t_0 \in R_+$ -თვის $U_{l,t_0} \neq \emptyset$. მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია $u: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ ამონახსნი ისეთი, რომ სრულდება (1.1_l) პირობები. ამრიგად, სრულდება 2.1 თეორემის ყველა პირობა. ამიტომ ნებისმიერი $\delta \in [0, \lambda]$, $k \in \mathbb{N}$ და $\sigma_* \in C(R_+)$, სრულდება (2.4) პირობა, რაც ეწინააღმდეგება (3.1_l) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 3.1. ვთქვათ, სრულდება (1.2), (2.1), (2.2), (2.3_l), (2.4_l) პირობები, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტი და ვთქვათ, რომელიმე $\gamma \in (0,1)$ -თვის

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_t t^\gamma \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) ds > 0. \quad (3.2_l)$$

გარდა ამისა, არსებობს $\delta \in [0, \lambda]$ და $\sigma_* \in C(R_+, R_+)$ ისეთი, რომ სრულდება (2.3) და

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma_*(t))^{\frac{\delta(1-\gamma)}{1-\lambda}} (\sigma(t))^{\lambda(l-1)} p(t) dt = +\infty. \quad (3.3_l)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის გვაქვს $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. (3.2_l)-ის თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (2.1_l) პირობა. მეორეს მხრივ, (2.5_l) და (3.2_l)-ის თანახმად არსებობს $c > 0$ და $t_1 \in (t_0, +\infty)$ ისეთი, რომ

$$\rho_{l,1}(t) \geq ct^{\frac{1-\gamma}{1-\lambda}}, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1.$$

ამიტომ (3.3_l)-ის თანახმად სრულდება (3.1_l) პირობა, სადაც $k = 1$. მაშასადამე 4.1 თეორემის ყველა პირობა სრულდება, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

ანალოგიურად მტკიცდება

შედეგი 3.2. ვთქვათ, სრულდება (1.2), (2.1), (2.2), (2.4_l) პირობები, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია და

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_t t \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) ds > 0 \quad (3.4_l)$$

გარდა ამისა, არსებობს $\delta \in [0, \lambda]$ და $\sigma_* \in C(R_+, R_+)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.3) პირობას ისეთი, რომ

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1+\lambda-\delta} (\sigma(t))^{(l-1)\lambda} (\ln(1 + \sigma_*(t)))^{\frac{\delta}{1-\lambda}} p(t) dt = +\infty, \quad (3.5_l)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის გვაქვს $U_{l,t_0} = \emptyset$.

შედეგი 3.3. ვთქვათ, სრულდება (1.2), (2.1), (2.2), (2.4_l) და (3.2_l) პირობები, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია და არსებობს $\alpha \in (1, +\infty)$ ისეთი, რომ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{\sigma(t)}{t^\alpha} > 0. \quad (3.6)$$

გარდა ამისა, თუ სრულდება ერთ-ერთი შედმეგი ორი პირობიდან

$$\alpha\lambda \geq 1 \quad (3.7)$$

ან თუ $\alpha\lambda < 1$,

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1+\lambda} \left(\frac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda} - \varepsilon \right) (\sigma(t))^{\lambda(l-1)} p(t) dt = +\infty \quad (3.8_l)$$

სადაც $\varepsilon > 0$ -თვის, მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$, გვაქვს $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (3.1_l) პირობა. მართლაც (3.2_l) და (3.6) თანახმად, არსებობს $\alpha > 1$, $\gamma \in (0,1)$, $c > 0$ და $t_1 \in R_+$ ისეთი, რომ

$$t^\gamma \int_t^{+\infty} s^{n-l-1} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) ds \geq c, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1 \quad (3.9)$$

და

$$\sigma(t) \geq ct^\alpha, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1 \quad (3.10)$$

(2.3_l) და (2.5_l)-ის თანახმად, ცხადია, რომ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho_{l,1}(t) = +\infty$. ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\rho_{l,1}(t) \geq 1$, როცა $t \geq t_1$. ამრიგად, (3.9)-ის თანახმად, (3.6_l)-დან მივიღებთ

$$\rho_{1,2}(t) \geq \frac{c}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t s^{-\gamma} ds = \frac{c}{l!(n-l)!(1-\gamma)} (t^{1-\gamma} - t_1^{1-\gamma}).$$

შევარჩიოთ $t_2 > t_1$, ისე რომ,

$$\rho_{1,2}(t) \geq \frac{c}{2l!(n-l)!(1-\gamma)} t^{1-\gamma}, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_2$$

ამრიგად, (3.9) და (3.10) -ის თანახმად, (3.6_l)-დან გვაქვს

$$\rho_{l,3}(t) \geq \left(\frac{c}{2l!(n-l)!(1-\gamma)} \right)^{1+\lambda} t^{(1-\gamma)(1+\alpha\lambda)} \quad \text{როცა} \quad t \geq t_3,$$

სადაც $t_3 \geq t_2$ საკმარისად დიდი რიცხვია. ნებისმიერი $k_0 \in N$ -თვის არსებობს $t_{k_0} \in R_+$, ისეთი რომ, როცა $t \geq t_{k_0}$,

$$\rho_{l,k_0}(t) \geq \left(\frac{c}{2l!(n-l)!(1-\gamma)} \right)^{1+\lambda+\dots+\lambda^{k_0-2}} t^{(1-\gamma)(1+\alpha\lambda+\dots+(\alpha\lambda)^{k_0-2})}.$$

დავუშვათ ეხლა, რომ სრულდება (3.7). შევარჩიოთ k_0 ისე, რომ $(1-\gamma)(k_0-1) \geq \frac{1}{\lambda}$. მაშინ (3.6) და (3.7)-ის ძალით გვაქვს

$$\rho_{l,1}(t) \geq 1, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1$$

სადაც $c_0 > 0$. ამიტომ (3.9) და (3.10)-ის თანახმად, ცხადია სრულდება (3.1_l), როცა $\delta = \lambda$ და $k = k_0$. მაშასადამე, იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება (3.7) პირობა, თეორემა დამტკიცებულია.

დავუშვათ ეხლა, რომ სრულდება (3.8_l) პირობა. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ და შევარჩიოთ $k_0 \in N$ ისე, რომ

$$1 + \alpha\lambda + \dots + (\alpha\lambda)^{k_0-2} > \frac{1}{1-\alpha\lambda} - \frac{\varepsilon}{\alpha(1-\gamma)}.$$

მაშინ (4.11)-დან გვაქვს

$$\rho_{l,k_0}(t) \geq c_0 t^{\frac{1-\gamma}{1-\alpha\lambda} - \frac{\varepsilon}{\alpha}}, \quad \text{როცა } t \geq t_{k_0},$$

სადაც $c_0 > 0$. მაშასადამე (3.10)-ის თანახმად

$$\rho_{l,k_0}^\lambda(\sigma(t)) \geq c_1 t^{\frac{\alpha\lambda(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda} - \varepsilon}, \quad \text{როცა } t \geq t_{k_0},$$

სადაც $c_1 > 0$. ე.ი (3.8_l)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (3.1_l), როცა $k = k_0$ და $\delta = \lambda$, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

ანალოგიურად მტკიცდება

შედეგი 3.4. ვთქვათ, სრულდება (1.2), (2.1), (2.4_l) და (3.4_l) პირობები, $l \in \{1, \dots, n - 1\}$, $l + n$ კენტია და არსებობს $\alpha > 0$, ისეთი რომ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf t^{-\alpha} \ln \sigma(t) > c. \quad (3.12)$$

მაშინ $U_{l,t_0} = \emptyset$ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის.

4. წინწასწრებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები A თვისებით

თეორემა 4.1. ვთქვათ, (2.1), (2.2), (2.3_l) და (2.4_l) სრულდება ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის, სადაც $l+n$ კენტია. გარდა ამისა, არსებობს $\delta \in [0, \lambda]$, $k \in \mathbb{N}$ და $\sigma_* \in C(R_+, R_+)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.3) პირობას, ისეთი რომ სრულდება (3.1_l) პირობა, სადაც $\rho_{l,k}$ ფუნქციები განსაზღვრულია (2.5_l), (2.6_l) ტოლობებით. გარდა ამისა, კენტი n -ის შემთხვევაში თუ სრულდება პირობა

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} p(t) dt = +\infty, \quad (4.1)$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, (1.1₀) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარბევადი ამონახსნი $u: [t_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ (შემთხვევა როცა $u(t) < 0$ განიხილება ანალოგიურად). მაშინ (2.1), (2.2) და 1.1 ლემის თანახმად, არსებობს $l \in \{0, \dots, n-1\}$ ისეთი, რომ $l+n$ კენტია და სრულდება (1.1_l) პირობები. რადგან სრულდება 3.1 თეორემის პირობები ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის, სადაც $l+n$ კენტია. ამიტომ გვაქვს $l \notin \{1, \dots, n-1\}$. მაშასადამე, n კენტია და $l = 0$. ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (1.3₀) პირობა, წინააღმდეგ შემთხვევაში არსებობს $c > 0$ ისეთი, რომ

$$u(t) \geq c \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1,$$

სადაც $t_1 > t_0$ საკმარისად დიდი რიცხვია. (1.1_l) და (4.1)-ის თანახმად

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n-i-1)! |u^{(i)}(t_1)| \geq c^\lambda \int_{t_1}^t s^{n-1} p(s) ds \rightarrow +\infty, \quad \text{როცა} \quad t \rightarrow +\infty.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (1.11) განტოლებას გააჩნია A თვისება. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.2. ვთქვათ სრულდება (2.1), (2.2), (4.1) პირობები და

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sigma(t))^\lambda}{t} > 0. \quad (4.2)$$

გარდა ამისა, არსებობს $\delta \in [0, \lambda]$, $k \in N$ და $\sigma_* \in C(R_+, R_+)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.3) პირობას ისეთი, რომ ლუწი n -ის შემთხვევაში (კენტი n -ის შემთხვევაში) სრულდება (3.1₁) ((3.2₁)) პირობა, მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება 4.1 თეორემის პირობები. მართლაც (3.1₁) და (4.2) ((3.1₂) და (4.2)) თანახმად ცხადია, რომ (3.1_l) სრულდება ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის, სადაც $l+n$ კენტია. ამრიგად, (4.1) და (4.2)-ის თანახმად, 4.1 თეორემის ყველა პირობა სრულდება, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 4.1. ვთქვათ სრულდება (2.1), (2.2), (4.2) პირობები. გარდა ამისა, ლუწი n -ის შემთხვევაში

$$\int_0^{+\infty} t^{n-2+\lambda} p(t) dt = +\infty, \quad (4.3)$$

ხოლო კენტი n -ის შემთხვევაში სრულდება (4.1) და

$$\int_0^{+\infty} t^{n-3+\lambda} (\sigma(t))^\lambda p(t) dt = +\infty. \quad (4.4)$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.2), (4.3) და (4.4)-ის თანახმად სრულდება 2.2 თეორემის პირობები, სადაც

$$\sigma_*(t) = t \text{ და } \delta = 0.$$

შედეგი 4.2. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (2.2) და (4.2) პირობები. გარდა ამისა, რომელიმე $k \in N$ -თვის როცა n ლუწია

$$\int_0^{+\infty} t^{n-2} (\rho_{1,k}(\sigma(t)))^\lambda p(t) dt = +\infty, \quad (4.5)$$

ხოლო კენტი n -თვის

$$\int_0^{+\infty} t^{n-3} (\sigma(t))^\lambda (\rho_{2,k}(\sigma(t)))^\lambda p(t) dt = +\infty, \quad (4.6)$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება, სადაც $\rho_{1,k}, (\rho_{2,k})$ ფუნქციები მოცემულია (2.5₁) და (2.6₁) ((2.5₂) და (2.6₂)) ტოლობებით.

დამტკიცება. დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ რომ (4.2), (4.5) და (4.6)-ის თანახმად სრულდება 4.2. თეორემის პირობები, როცა $\delta = \lambda$ და $\sigma_*(t) = \sigma(t)$.

თეორემა 4.3. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (2.2) პირობები და (4.7)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{(\sigma(t))^\lambda}{t} < +\infty. \quad (4.7)$$

გარდა ამისა, თუ არსებობს $\delta \in [0, \lambda]$, $k \in \mathbb{N}$ და $\sigma_* \in C(R_+, R_+)$ სრულდება (2.3) და (3.1_{n-1}) პირობები, მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება, სადაც ρ_{n-1} განსაზღვრულია (2.5_{n-1}), (2.6_{n-1}) ტოლობებით.

დამტკიცება. (2.1), (2.2), (2.2_{n-1}), (3.1_{n-1}) და (4.7)-ის თანახმად 4.1 თეორემის ყველა პირობა სრულდება. ამრიგად, 4.1 თეორემის თანახმად, (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

შედეგი 4.3. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (2.2), (4.7) პირობები. გარდა ამისა თუ

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda (\sigma(t))^{(n-2)\lambda} p(t) dt = +\infty, \quad (4.8)$$

მაშინ (1.11) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (2.1), (2.2), (4.7) და (4.8)-ის ძალით, 4.3 თეორემის ყველა პირობა სრულდება, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 4.4. თუ სრულდება (2.1), (2.2), (4.7) პირობები, მაშინ თუ რომელიმე $k \in \mathbb{N}$ -თვის

$$\int_0^{+\infty} (\sigma(t))^{(n-2)\lambda} \left(\rho_{n-1,k}(\sigma(t)) \right)^\lambda p(t) dt = +\infty$$

საკმარისია იმისთვის, რომ (1.11) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, სადაც $\rho_{n-1,k}$ განსაზღვრულია (2.5_{n-1}) და (2.6_{n-1}) ტოლობებით.

დამტკიცება. რადგან (4.9)-დან გამომდინარეობს (3.1_{n-1}), სადაც $\delta = \lambda$ და $\sigma_*(t) = \sigma(t)$, მოცემული შედეგის სამართლიანობა გამომდინარეობს 4.3 თეორემიდან.

თეორემა 4.3. ვთქვათ, (2.1), (2.2), (4.1), (4.2) და სრულდება (3.2₁) ლუწი n -ის შემთხვევაში ((3.2₂) კენტი n -ის შემთხვევაში). გარდა ამისა არსებობს $\alpha \in (1, +\infty)$ ისეთი, რომ სრულდება (3.10) უტოლობა. მაშინ, იმისთვის რომ, (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, საკმარისია შესრულდეს ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან ან (3.7) ან თუ $\alpha\lambda < 1$ მაშინ სრულდება (3.8₁) ლუწი n -ის ((3.8₂) კენტი n -ის) შემთხვევაში.

დამტკიცება. (3.2₁) და (4.2) ((3.2₂) და (4.2)) ძალით, ცხადია რომ, ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის სადაც $l+n$ კენტია სრულდება (2.3_l) და (2.4_l). ვიგულისხმობთ რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია წესიერი დადებითი ამონახსნი $u: [t_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ რომელიც აკმაყოფილებს (1.1_l) პირობებს. მაშინ 3.3 შედეგის თანახმად $l \notin \{1, \dots, n-1\}$. მაშასადამე, n კენტია და $l = 0$. მაშინ (4.1)-ის ძალით, ცხადია, რომ სრულდება (1.3₀) პირობები, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

5. აუცილებელი და საკმარისი პირობები

თეორემა 5.1. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (2.2) პირობები და

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\sigma(t)}{t} < +\infty. \quad (5.1)$$

მაშინ პირობა

$$\int_0^{+\infty} t^{(n-1)\lambda} p(t) dt = +\infty \quad (5.2)$$

აუცილებელი და საკმარისია იმისათვის, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვიგულისხმობთ, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება და

$$\int_0^{+\infty} t^{(n-1)\lambda} p(t) dt < +\infty. \quad (5.3)$$

(5.1) და (5.3) თანახმად

$$\int_0^{+\infty} (\sigma(t))^{(n-1)\lambda} p(t) dt < +\infty.$$

ამიტომ, 4.1 ლემის თანახმად [7], არსებობს $c \neq 0$ ისეთი, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს წესიერი ამონახსნი $u: [t_0, +\infty) \rightarrow R$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u^{(n-1)}(t) = c$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ განტოლებას გააჩნია A თვისება.

საკმარისობა. (5.1) და (5.2)-ის თანახმად, ცხადია, რომ (4.3) პირობა სრულდება. მაშასადამე, საკმარისობა გამომდინარეობს 4.1 შედეგიდან.

თეორემა 5.2. ვთქვათ, n კენტი, სრულდება (2.1) და (2.2) პირობები და

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(t)}{t^{\frac{2-\lambda}{\lambda}}} > 0. \quad (5.4)$$

მაშინ (4.1) პირობა აუცილებელი და საკმარისია იმისათვის, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვიგულისხმოდ, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება და

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} p(t) dt < +\infty. \quad (5.5)$$

(5.5)-ის და ლემა 4.1 თანახმად [7], არსებობს $c \neq 0$ ისეთი, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u: [t_0, +\infty) \rightarrow R$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = c$, მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება პირობას, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

საკმარისობა. (5.4)-ის თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (5.2). მეორეს მხრივ, (4.1) და (5.4)-ის თანახმად, სრულდება (4.4) პირობა. ამრიგად, რადგან n კენტი ყველა პირობები 4.1 შედეგის სრულდება, ამიტომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება, რაც ამტკიცებს მოცემული თეორემის სამართლიანობას.

შენიშვნა 5.1. (5.4) პირობა განსაზღვრავს σ ფუნქციის სიმრავლეს, რომლისთვისაც (4.1) პირობა აუცილებელი და საკმარისია იმისათვის, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება. აღმოჩნდა, რომ $\frac{2-\lambda}{\lambda}$ რიცხვი ოპტიმალურია. მართლაც ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, $\lambda \in \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, 1\right)$ და $\gamma \in (1, 2)$. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება (1.1₀), სადაც

$$p(t) = -\gamma(\gamma - 1) \dots (\gamma - n + 1)t^{-n+\gamma(1-\lambda)\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}-\varepsilon\right)}$$

$$\sigma(t) = t^{\frac{2-\lambda}{\lambda}-\varepsilon}, \quad t \geq 1,$$

ცხადია, რომ (4.1) პირობა სრულდება და

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(t)}{t^{\frac{2-\lambda}{\lambda}}} = 0 \quad \text{და} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(t)}{t^{\frac{2-\lambda}{\lambda}-\varepsilon}} > 0.$$

მეორეს მხრივ, კენტი n -ის შემთხვევაში $u(t) = t^\gamma$ არის (1.1₀) განტოლების ამონახსნი. მაშასადამე, კენტი n -ის შემთხვევაში, (1.1₀) განტოლებას არ გააჩნია A თვისება.

6. დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები.

მეექვსე პარაგრაფში განვიხილავთ (1.1₀) განტოლების იმ შემთხვევას, როცა

$$\lambda > 1, \quad \sigma(t) \leq t, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty. \quad (6.1)$$

თეორემა 6.1. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (3.2) და (6.1) პირობები, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტი და

$$\int_0^{+\infty} t^{n-l-1} (\sigma(t))^{1+\lambda(l-1)} p(t) dt = +\infty. \quad (6.2)$$

გარდა ამისა, თუ რომელიმე $t_0 \in R_+$ -თვის, $U_{l,t_0} \neq \emptyset$ (იხ. განმარტება 2.1), მაშინ ნებისმიერი $k \in N$ და $\delta \in [\lambda-1, \lambda]$ -თვის

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{l,k}^\delta(\sigma(s)) ds = 0, \quad (6.3)$$

ხოლო როცა $\delta \in [0, \lambda-1)$

$$\int_0^{+\infty} s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{l,k}^\delta(\sigma(s)) ds < +\infty, \quad (6.4)$$

სადაც

$$\tilde{\rho}_{l,1}(t) = \exp\left(\frac{1}{l!(n-l)!} \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) d\xi ds\right), \quad (6.5)$$

$$\tilde{\rho}_{l,k}(t) = \frac{1}{l!(n-l)!} \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{\lambda(l-1)} P(\xi) \tilde{\rho}_{l,k-1}^\lambda(\sigma(\xi)) d\xi ds, \quad (i = 2, 3, \dots, k) \quad (6.6)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $t_0 \in R_+$ და $U_{l,t_0} \neq \emptyset$. U_{l,t_0} სიმრავლის განმარტების თანახმად, (1.1₀) განტოლებას გააჩნია წესიერი $u \in U_{l,t_0}$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1_l) პირობას. (1.1₀), (1.1_l) და (2.1_l)-ის თანახმად, ცხადია, რომ სრულდება (1.3) პირობა. ანალოგიური მსჯელობით, როგორც ეს მოყვანილი იყო მე-2 პარაგრაფში, ვაჩვენებთ, რომ

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{\lambda(l-1)} (u^{(l-1)}(\sigma(\xi)))^\lambda p(\xi) d\xi ds \quad \text{როცა } t \geq t_*, \quad (6.7)$$

სადაც t_* -საკმარისად დიდი რიცხვია. რადგან

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u^{(l-1)}(t) = +\infty,$$

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $u^{(l-1)}(t) \geq 1$ როცა $t \geq t_*$.

ამიტომ (6.1)-ის თანახმად (6.7)-დან გვექნება

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{\lambda(l-1)} p(\xi) u^{(l-1)}(\sigma(\xi)) d\xi ds.$$

მეორეს მხრივ, რადგან ფუნქცია $\frac{u^{(l-1)}(t)}{t}$ არაზრდადია, (6.1) გათვალისწინებით, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} u^{(l-1)}(t) &\geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{\lambda(l-1)} \frac{u^{(l-1)}(\sigma(\xi))}{\sigma(\xi)} \sigma(\xi) p(\xi) d\xi ds \\ &\geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) u^{(l-1)}(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (6.8)$$

ე.ი.

$$x'(t) \geq \frac{u^{(l-1)}(t)}{l!(l-n)!} \int_t^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) d\xi, \quad (6.9)$$

სადაც

$$x(t) = \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_*}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) u^{(l-1)}(\xi) d\xi ds. \quad (6.10)$$

(6.8) და (6.10)-ის ძალით (6.9)-დან მივიღებთ

$$x'(t) \geq \frac{x(t)}{l!(n-l)!} \int_t^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) d\xi.$$

(6.2)-ის თანახმად, ცხადია $x(t) \rightarrow +\infty$ როცა $t \rightarrow +\infty$. ამიტომ შეგვიძლია შავარჩიოთ $t_1 \geq t_*$ ისეთი, რომ $x(t_1) \geq 1$. თუ მოცემულ უტოლობას გავყოფთ $x(t)$ -ზე და ვაინტეგრებთ t_1 -დან t -მდე მივიღებთ

$$x(t) \geq \exp\left(\frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) d\xi ds\right).$$

ამგვარად, (6.10) და (6.8)-ის თანახმად

$$u^{(l-1)}(t) \geq \tilde{\rho}_{t_*,l,1}(t) \text{ როცა } t \geq t_1, \quad (6.11)$$

სადაც

$$\tilde{\rho}_{t_1,l,1}(t) = \exp\left(\frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) d\xi ds\right). \quad (6.12)$$

ამრიგად, (6.7)-დან მივიღებთ

$$u^{(l-1)}(t) \geq \tilde{\rho}_{t_1,l,i}(t) \text{ როცა } t \geq t_1, \quad (6.13)$$

სადაც

$$\tilde{\rho}_{t_1,l,i}(t) = \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-l-1} (\sigma(\xi))^{\lambda(l-1)} p(\xi) \tilde{\rho}_{t_1,l,i-1}^\lambda(\sigma(\xi)) d\xi ds, \quad i = 2, \dots, k. \quad (6.14)$$

მეორეს მხრივ, (6.5), (6.6) გათვალისწინებით, გვაქვს

$$\begin{aligned} u^{(l-1)}(t) &\geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) (u^{(l-1)}(\sigma(s)))^\lambda ds \\ &\geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) (u^{(l-1)}(\sigma(s)))^\delta (u^{(l-1)}(\sigma(s)))^{\lambda-\delta} ds \\ &\geq \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) \tilde{\rho}_{t,l,k}^\delta(\sigma(s)) (u^{(l-1)}(\sigma(s)))^{\lambda-\delta} ds. \end{aligned} \quad (6.15)$$

ვთქვათ $\lambda - 1 \leq \delta \leq \lambda$. (6.15)-დან თუ გავითვალისწინებთ რომ ფუნქცია $\frac{u^{(l-1)}(t)}{t}$ კლებადია, (6.1)-ის ძალით გვექნება

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{u^{(l-1)}(t)}{t} \frac{1}{l!(n-l)!} \int_{t_1}^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t,l,k}^\delta(\sigma(s)) ds.$$

საიდანაც

$$\left(\frac{u^{(l-1)}(t)}{t}\right)^{1-\lambda+\delta} \geq \frac{1}{l!(n-l)!} \frac{1}{t} \int_{t_1}^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t,l,k}^\delta(\sigma(s)) ds$$

რადგან $\frac{u^{(l-1)}(t)}{t} \downarrow 0$, როცა $t \uparrow +\infty$, ამიტომ $1 - \lambda + \delta \geq 0$ გვაქვს

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{t_1} \frac{1}{t} \int_{t_1}^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) ds = 0. \quad (6.16)$$

ვთქვათ $0 \leq \delta < \lambda - 1$ მაშინ (6.15)-დან გვაქვს

$$u^{(l-1)}(t) \geq \frac{1}{l! (n-l)!} \int_{t_1}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) (u^{(l-1)}(s))^{\lambda - \delta} ds \quad \text{როცა } t \geq t_1.$$

ამიტომ

$$(u^{(l-1)}(t))^{\lambda - \delta} \geq \frac{1}{(l! (n-l)!)^{\lambda - \delta}} \times \left(\int_{t_1}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) (u^{(l-1)}(s))^{\lambda - \delta} ds \right)^{\lambda - \delta}. \quad (6.17)$$

შევარჩიოთ $t_2 \geq t_1$ ისე, რომ

$$\int_{t_1}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) (u^{(l-1)}(s))^{\lambda - \delta} ds > 0 \quad \text{როცა } t \geq t_2.$$

ამიტომ (6.17)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{(u^{(l-1)}(t))^{\lambda - \delta} t^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(t))^{\lambda l - \delta} p(t) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(t))}{\left(\int_{t_1}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) (u^{(l-1)}(s))^{\lambda - \delta} ds \right)^{\lambda - \delta}} \\ & \geq \frac{1}{(l! (n-l)!)^{\lambda - \delta}} t^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(t))^{\lambda l - \delta} p(t) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(t)), \quad \text{როცა } t \geq t_2. \end{aligned}$$

მოცემულ უტოლობას თუ ვაინტეგრებთ t_2 -დან t -მდე, მივიღებთ

$$\int_{t_2}^t \frac{d\varphi(s)}{(\varphi(s))^{\lambda - \delta}} \geq \frac{1}{(l! (n-l)!)^{\lambda - \delta}} \int_{t_2}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) ds, \quad (6.18)$$

სადაც

$$\varphi(t) = \int_{t_1}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) (u^{(l-1)}(s))^{\lambda - \delta} ds.$$

რადგან $0 \leq \delta < \lambda - 1$ ამიტომ

$$\int_{t_2}^t \frac{d\varphi(s)}{(\varphi(s))^{\lambda-\delta}} = \int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\xi^{\lambda-\delta}} = \frac{1}{\delta+1-\lambda} ((\varphi(t))^{1+\delta-\lambda} - (\varphi(t_2))^{1+\delta-\lambda}) \leq \frac{(\varphi(t_2))^{1+\delta-\lambda}}{\lambda-(1+\delta)}.$$

ე.ი (6.18)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_2}^t s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) ds \\ &= \int_{t_2}^{+\infty} s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda l - \delta} p(s) \tilde{\rho}_{t_1, l, k}^\delta(\sigma(s)) < +\infty. \end{aligned} \quad (6.19)$$

რადგან

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\rho}_{t_1, l, k}(t)}{\tilde{\rho}_{\alpha, k}(t)} = 1$$

ამიტომ ცხადია, რომ როცა $\lambda - 1 \leq \delta \leq \lambda$ (6.16)-ის თანახმად სრულდება (6.3) პირობა, ხოლო როცა $0 \leq \delta < \lambda - 1$, სრულდება (6.4), სადაც $\tilde{\rho}_{l, k}$ მოცემულია (6.5) და (6.6) ტოლობებით.

7. (1. 1_l) ტიპის ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები

თეორემა 7.1. ვთქვათ, სრულდება (2.1), (6.1) და (6.2) პირობები. $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია. გარდა ამისა, თუ რომელიმე $k \in N$ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda-\delta} p(s) \tilde{\rho}_{l,k}^\delta((\sigma(s))) ds > 0, \quad \text{რომელიმე } \delta \in [\lambda-1, \lambda] \quad (7.1)$$

ან

$$\int_0^{+\infty} s^{n-l-\lambda+\delta} (\sigma(s))^{\lambda-\delta} p(s) \tilde{\rho}_{l,k}^\delta(\sigma(s)) ds = +\infty, \quad \text{რომელიმე } \delta \in [0, \lambda-1). \quad (7.2)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის, $U_{l,t_0} = \emptyset$, სადაც $\tilde{\rho}_{l,k}^\lambda$ ფუნქციები მოცემულია (6.5) და (6.6) ტოლობებით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $t_0 \in R_+$ ისეთი რომ $U_{l,t_0} \neq \emptyset$. მაშინ U_{l,t_0} სიმრავლის განმარტების თანახმად (1.1₀) განტოლებას გააჩნია $u: [t_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ამონახსნი ისეთი, რომ სრულდება (1.1_l) პირობები. რადგან სრულდება 6.1 თეორემის პირობები, ამიტომ ნებისმიერი $k \in N$ და $\delta \in [\lambda-1, \lambda]$ (ნებისმიერი $k \in N$ და $\delta \in [0, \lambda)$ -თვის) სრულდება (6.3) ((6.4)) პირობა, ეს კი ეწინააღმდეგება (7.1) ((7.2)) პირობას, მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 7.1. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (2.2_l), (6.1) და (6.2) პირობები, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია. თუ რომელიმე $k \in N$ -თვის

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)} p(s) \tilde{\rho}_{l,k}^\lambda((\sigma(s))) ds = +\infty, \quad (7.3)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R$ -თვის $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (7.3) პირობიდან გამომდინარეობს (7.1) პირობა, როცა $\delta = \lambda$.

შედეგი 7.2. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (6.2), (6.1) პირობები $l \in \{1, \dots, n-1\}$,

$l + n$ კენტი

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_t t \int_t^{+\infty} \xi^{n-l-2} (\sigma(\xi))^{1+\lambda(l-1)} p(\xi) d\xi > l! (n-l)!, \quad (7.4)$$

და

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t s^{n-l} (\sigma(s))^{\lambda l} p(s) ds = +\infty. \quad (7.5)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. (7.4)-ის თანახმად თუ გავითვალისწინებთ (6.5)-ს

$$\tilde{\rho}_{l,1}(t) \geq t, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1,$$

სადაც t_1 საკმარისად დიდი რიცხვია. ამიტომ (7.5)-ის თანახმად სრულდება (7.1) პირობა, როცა $\delta = \lambda$. ე.ი. სრულდება 7.1. თეორემის პირობები, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 7.3. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (6.1) და (6.2) პირობები, $l \in \{1, \dots, n-1\}$ სადაც $l + n$ კენტი და სრულდება პირობა

$$\int_0^{+\infty} s^{n-l-\lambda} (\sigma(s))^{\lambda l} p(s) ds = +\infty. \quad (7.6)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის, $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (7.6)-ის თანახმად სრულდება (7.2) პირობა, როცა $\delta = 0$.

შედეგი 7.4. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (6.1) და (6.2) პირობები, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l + n$ კენტი და

$$\int_0^{+\infty} s^{n-l-1-\varepsilon} (\sigma(s))^{\lambda(l-1)+1+\varepsilon} p(s) ds = +\infty, \quad (7.7)$$

სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია, მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. რადგან საკმარისად დიდი t -თვის $\tilde{\rho}_{l,k}(t) \geq 1$, ამიტომ (7.7)-ის თანახმად, როცა $\delta = \lambda - 1 - \varepsilon$, ცხადია, რომ სრულდება (7.2) პირობა, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 7.5. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (6.1), (7.4) პირობები, $l \in \{1, \dots, n-1\}$,

$l + n$ კენტია და

$$\int_0^{+\infty} s^{n-l-1-\varepsilon} (\sigma(t))^{\lambda l} p(t) dt = +\infty. \quad (7.8)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ -თვის, $U_{l,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. (7.4) და (6.5)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\tilde{\rho}_{l,1}(t) \geq t, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1,$$

სადაც t_1 საკმარისად დიდი რიცხვია, ამიტომ (7.8)-ის თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (7.2) პირობა, როცა $\delta = \lambda - 1 - \varepsilon$, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

8. დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები A თვისებით

თეორემა 8.1. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (2.2_l), (6.1), და (6.2) პირობები და ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია და რომელიმე $k \in N$ -სთვის სრულდება ერთ-ერთი (7.1) ან (7.2) პირობები. გარდა ამისა თუ კენტი n -ის შემთხვევაში

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} p(t) dt = +\infty, \quad (8.1)$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u: [t_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$. მაშინ (6.1), (6.2) და (8.1)-ის თანახმად, არსებობს $l \in \{1, \dots, n-1\}$ ისეთი, რომ $l+n$ კენტია და სრულდება (1.1_l) პირობა, რადგან სრულდება 7.1 თეორემის პირობები, ამიტომ $l \notin \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია. მაშასადამე n კენტია და $l=0$.

ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (1.3₀) პირობა, მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში (6.1) ძალით არსებობს $c > 0$, ისეთი, რომ საკმარისად დიდი t -თვის $u(\sigma(t)) \geq c$. ამიტომ (1.1₀) გვაქვს

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n-i-1)! |u^{(i)}(t_1)| \geq c^\lambda \int_{t_1}^t s^{n-1} p(s) ds, \quad \text{როცა } t \geq t_1,$$

სადაც t_1 საკმარისად დიდი რიცხვია. თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $t \rightarrow +\infty$ მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{+\infty} s^{n-1} p(s) ds < +\infty.$$

ეს უკანასკნელი ეწინააღმდეგება (8.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 8.1. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (8.1), (6.1) და (6.2) პირობები და

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^\lambda(t)}{t} > 0, \quad (8.2)$$

მაშინ იმისათვის, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, საკმარისია, რომელიმე $k \in N$ -თვის

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t s^{n-1} \tilde{\rho}_{1,k}^\lambda(\sigma(s)) p(s) ds = +\infty. \quad (8.3)$$

დამტკიცება. (7.2) და (7.3)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (8.3) პირობა ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის, სადაც $l+n$ კენტია. ამიტომ შედეგის სამართლიანობა გამომდინარეობს 7.1. შედეგიდან.

შედეგი 8.2. თუ სრულდება (1.2₀), (6.1), (6.2), (8.1) და (8.2) პირობები, გარდა ამისა, თუ ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის სრულდება (7.4), სადაც $l+n$ კენტია, მაშინ პირობა

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t s^n p(s) ds = +\infty \quad (8.4)$$

საკმარისია იმისთვის, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება.

დამტკიცება. დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (8.4) და (8.2)-ის თანახმად სრულდება (7.5) პირობა ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის.

შედეგი 8.3. თუ სრულდება (1.2₀), (6.1), (6.2), (8.2) პირობები და

$$\int_0^{+\infty} s^{n-\lambda} p(s) ds = +\infty, \quad (8.5)$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ (8.2) და (8.5)-ს ცხადია, რომ სრულდება (7.6) ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის. ამიტომ 7.3 შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება. მოცემული შედეგი დამტკიცებულია.

შედეგი 8.4. თუ სრულდება (1.2₀), (6.1), (6.2), (8.2) პირობები

$$\int_0^{+\infty} s^{n-2-\varepsilon} (\sigma(s))^{1+\varepsilon} ds = +\infty, \quad (8.6)$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება, სადაც $\varepsilon > 0$ რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

დამტკიცება. (8.6)-ის და (8.2)-ის თანახმად ცხადია ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ -თვის გამომდინარეობს (7.7) პირობა, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

ანალოგიურად 7.5. შედეგის გამოყენებით ვაჩვენებთ 8.5 შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 8.5. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (6.1), (7.3) და (8.2) პირობები. გარდა ამისა თუ

$$\int_0^{+\infty} s^{n-2-\varepsilon} (\sigma(s))^\lambda p(s) ds = +\infty$$

მაშინ (1.1₀) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

თეორემა 8.2. ვთქვათ სრულდება (1.2₀), (6.1), (6.2), (8.2) პირობები n კენტია და

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(t)}{t^\alpha} > 0, \quad (8.7)$$

სადაც

$$\alpha > \frac{2}{1+\lambda}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad (8.8)$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} p(t) dt = +\infty, \quad (8.9)$$

აუცილებელი და საკმარისია იმისთვის, რომ (1.1₀) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება.

დამტკიცება. აუცილებლობა გამომდინარეობს ლემა 4.1-დან [7]. (8.7)-(8.9)-ის თანახმად სრულდება (7.7) ნებისმიერი $l \in \{2, \dots, n-1\}$ -თვის. რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა

ნაშრომში განხილულია მაღალი რიგის გადახრილ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება. სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება წინწასწრებულ და დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ოსცილაციური თვისებების შესწავლას. წინწასწრებული არგუმენტის შემთხვევაში აღნიშნული საკითხები რეფერატული ხასიათის არის და ძირითადად მიზნად ისახავს კვლევის სხვადასხვა მეთოდის შესწავლას, რომელიც საჭიროა აღნიშნული საკითხის შესწავლის დროს. რაც შეეხება დაგვიანებულ არგუმენტიან დიფერენციალურ განტოლებებს, ამ შემთხვევაში მიღებული შედეგები ძირითადად თეორიული ხასიათისაა, ახალია და შესაძლებლობას იძლევა გაგრძელდეს შემდგომი კვლევა ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ოსცილაციური ყოფაქცევის შესწავლისთვის.

ციტირებული ლიტერატურა

- [1] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *М. Ил.*, 1954, Т1-Т2.
- [2] Atkinson P.V. On second order non-linear oscillations pacific. *J. Math.* 1955, v. 5, No. 1, 643-647.
- [3] Mikusinski J. On fite's oscillation theorems. *Colloq. Math.* 1951, v. 2, No. 1, 34-39.
- [4] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А., Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Москва, Наука*, 1990.
- [5] Koplatadze R. On asymptotic behavior of soluions of n-th order Emden-Fowler differential equations with advanced argument. *Czeh. Math. J.* 2010, v. 60, No. 135, 817-833.
- [6] Koplatadze R. Oscillatory properties of solutions of generalized Emden-Fowler equations. *Pros. In Mathematics* (accept).
- [7] R. Koplatadze, On oscillatory properties of solutions of functional differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 1994, v. 3, 3-179.