ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი გოგნაძე

ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთი ფუნდამენტური საკითხი და მათი გამოყენება ჰარმონიულ ანალიზში

(სტუდენტური პროექტი)

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოც. პროფ.,
ფიზ. მათ. მეც. დოქტ., თეიმურაზ ახობაძე

2013 წელი

თავი I
ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთი ფუნდამენტური საკითხი

შესავალი

ნადვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მრავალი საკითხი დაკავშირებულია ინტეგრების და დიფერენცირების ოპერაციებთან. ამ მიმართულების ერთ-ერთ მნიშნელოვან შედეგს წარმოადგენს ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირებადობის შესახებ, ამასთან, ინტეგრალის გაწარმოება მოხერხებულია ჩავატაროთ მაქსიმალური ფუნქციის ტერმინებში. ტერმინი „მაქსიმალური ფუნქცია" წარმოიშვა ამ საკითხების კვლევისას და მისი თვისებები უმეტეს შემთხვევაში ჩაიწერება სუსტი უტოლობების საშუალებით. ასევე მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს თეორემები დაფარვების შესახებ. ამ შემთხვევაში მთავარი იდეა ისაა, რომ ნებისმიერი (ღია) სიმრავლე შეიძლება დაიფაროს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი კუბებით ან ბირთვებით (დამფარავი ინტერვალების გვარობა დამოკიდებულია განსახილველ საკითხზე). ზოგჯერ საკმარისია დავფაროთ სიმრავლის რაღაც ნაწილი. ეს მეთოდი გამოყენებული არის ლემაში დაფარვების შესახებ, რომელსაც ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორის ერთ-ერთ ძირითად საკითხს წარმოადგენს მარცინკევიჩის საინტერპოლაციო თეორემა, რომლის მეშვეობითაც ვამტკიცებთ მრავალ საკითხს.

§1. მაქსიმალური ფუნქცია

კარგად ცნობილი ლებეგის ფუნდამენტური თეორემის თანახმად ლოკალურად ჯამებადი f - ფუნქციისათვის თითქმის ყველა x -თვის R^n -ზე სრულდება თანაფარდობა:

(1) $$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy=f(x),$$

სადაც $B(x,r)$-არის ბირთვი ცენტრით x წერტილში და რადიუსით r, ხოლო $m(B(x,r))$ აღნიშნავს ბირთვის ლებეგის ზომას. იმისათვის, რომ შევისწავლოთ (1) თანაფარდობა, განვიხილოთ ტოლობის მარცხენა მხარის ანალოგი, რომელიც მიიღება ზღვარის შევცვლით ზუსტი ზედა საზღვრით. ამგვარად მიღებულ ობიექტს უწოდებენ f ფუნქციის მაქსიმალურ ფუნქციას და აღნიშნავენ Mf სიმბოლოთი. იმისათვის, რომ მაქსიმალური ფუნქციის თვისებები გამოისახოს f ფუნქციის ფარდობითი მნიშნელობების ტერმინებში და არ იყოს დამოკიდებული მის დადებითი და უარყოფითი მნიშნელობზე, ჩვენ f -ს ჩავანაცვლებთ $|f|$- ით, ანუ

$$Mf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy.$$

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $Mf(x)$ შეიძლება იყოს უსასრულო ნებისმიერი $x-$ თვის.

ვთქვათ g ფუნქცია განსაზღვრულია R^n -ზე; ყოველი α სათვის განვიხილოთ

$$\{x:|g(x)|>\alpha\}.$$

შემოვიღოთ $\lambda(\alpha)$ ფუნქცია, რომელიც ტოლია მოცემული სიმრავლის ზომის. $\lambda(\alpha)-$ს უწოდებენ $|g|-$ს განაწილების ფუნქციას.

ნებისმიერი სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ $g-$ს “ზომაზე“, შეიძლება გამოისახოს $\lambda(\alpha)$ ფუნქციით. მაგალითად, თუ $g\in L^p$, მაშინ

$$\int_{R^n}|g(y)|^p\,dy=-\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha).$$

მნიშვნელოვანია დებულება, რომელიც ეხება განაწილების ფუნქციას. ეს დებულება ასე ყალიბდება: თუ g ფუნქცია ჯამებადია, მაშინ

$$\lambda(\alpha)\le\frac{A}{\alpha},\ \text{სადაც}\ A=\int_{R^n}|g(y)|\,dy.$$

მართლაც:

$$\int_{R^n}|g(y)|\,dy\ge\int_{|g|>\alpha}|g(y)|\,dy\ge\alpha\lambda(\alpha).$$

(უკანასკნელი დებულება მალე იქნება გამოყენებული.)

ეს განსაზღვრებები საკმარისია პირველი თეორემის ჩამოსაყალიბებლად. ეს უკანასკნელი შეიცავს ძირითად შედეგებს და ეხება მაქსიმალურ ფუნქციებს. ამ დებულებიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენციადობის შესახებ.

თეორემა 1. ვთქვათ f განსაზღვრულია R^n -ზე.

ა) თუ $f\in L^p(R^n),$ სადაც $1\le p\le\infty$, მაშინ Mf ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია;

ბ) თუ $f\in L^1(R^n)$, მაშინ ნებისმიერი $\alpha>0$ -თვის

$$m\{x:(Mf)(x)>\alpha\}\le\frac{A}{\alpha}\int_{R^n}|f|\,dx;$$

გ) თუ $f\in L^p(R^n)$, სადაც $1<p\le\infty$, მაშინ $Mf\in L^p(R^n)$ და

$$\|Mf\|_p\le A_p\|f\|_p\,,$$

სადაც A_p დამოკიდეულია p -ზე და n –ზე (განზომილებაზე).

შედეგი: თუ $f\in L^p(R^n)$,$1\le p\le\infty$, და უფრო მეტიც, თუ f ლოკალურად ჯამებადია, მაშინ

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy=f(x)$$

თითქმის ყველა $x-$ თვის.

თეორემა 1-ის დასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება ლემა დაფარვების შესახებ.

ლემა. ვთქვათ E -ზომადი სიმრავლეა R^n -ში და არსებობს ამ სიმრავლის დაფარვა $\{B_j\}$ ბირთვთთა ოჯახით, ამასთან, ამ ბირთთვთა დიამეტრების სიმრავლე შემოსაზღვრულია. მაშინ ამ ოჯახიდან შესაძლებელია ამოვარჩიოთ ისეთი, წყვილ–წყვილად თანაუკვეთ ბირთვთა მიმდევრობა $B_1,B_2,...,B_k,...$ (სასრული ან უსასრულო), რომ

$$\sum_k m(B_k)\ge Cm(E),$$

სადაც C -დადებითი მუდმივია, რომელიც დამოკიდებულია განზომილებაზე (n -ზე), მაგალითად, $C=5^{-n}$.

დამტკიცება: დასაწყისში აღვწეროთ $B_1,B_2,...,B_k$, ... ბირთვები. ამოვარჩიოთ „თითქმის“ უდიდესი შესაძლო ბირთვი B_1, ეს ნიშნავს რომ B_1 დიამეტრი მეტი ან ტოლია $\frac{1}{2}\sup\{diamB_j\}$. ვთქვათ $B_1,B_2,...,B_k$ ამორჩეული გვაქვს, ისევ ვირჩევთ თითქმის “უდიდეს“ ბირთვს ე.ი.

$\dim B_{k+1} \geq \frac{1}{2}\sup\left\{\dim B_j,\ \ B_j \cap \{\mathrm{B_i}\}_{i=1}^{k} = \varnothing\right\}.$ მაშასადამე, გვაქვს $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ ბირთვების მიმდევრობა. საზოგადოდ, ეს მიმდევრობა შეიძლება იყოს სასრული და დასრულდეს B_k -ზე. ეს მოხდება იმ შემთხვევაში, როცა ბირთვთა მიმდევრობაში აღარ იარსებებს აღნიშნული თვისების მქონე ბირთვი, რომელის თანაკვეთა რომელიმე $B_1, B_2, ..., B_k$ ბირთვთან იქნება ცარიელი სიმრავლე.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა იმისდა მიხედვით, $\sum m(B_k) = \infty$, თუ $\sum m(B_k) < \infty$. პირველ შემთხვევაში ლემა უკვე დამტკიცებულია, მიუხედავად იმისა სასრულია, თუ უსასრულოა E სიმრავლის ზომა. გადავიდეთ მეორე შემთხვევაზე $-\sum m(B_k) < \infty$. აღვნიშნოთ B_k^* ბირთვი, რომლის ცენტრი ემთხვევა B_k –ს ცენტრს და დიამეტრი 5-ჯერ აღემატება მისას. ჩვენ ვამტკიცებთ:

(2) $$\bigcup_k B_k^* \supset E.$$

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (2), უნდა ვაჩვენოთ $\bigcup_k B_k^* \supset B_j$ ნებისმიერი ფიქსიებული B_j -თვის, რომელიც ფარავს E –ს. ვიგულისხმოთ, რომ B_j არ ეკუთნის $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ მიმდევრობას; წინააღმდეგ შემთხვევაში ლემა დამტკიცებული იქნება. ვინაიდან $\sum m(B_k) < \infty$, და $\dim(B_k) \to 0,$ როცა $k \to 0$, ამიტომ ამოვარჩევთ ისეთ k –ს, რომ $\dim(B_{k+1}) < \frac{1}{2}\dim(B_j)$. ბირთვი B_j აუცილებლად იკვეთება რომელიღაც $B_1, B_2, ..., B_k$ -სთან; წინააღმდეგ შემთხვევაში B_j -ის ავირჩევდით $(k+1)$ –ე ბირთვის ნაცვლად, რადგან B_j -ს დიამეტრი 2-ჯერ და მეტად აღემატება B_{k+1} -ს დიამეტრს. მაშასადამე, B_j იკვეთება B_{j_0} –თან, სადაც $1 \leq j_0 \leq k$ და $\frac{1}{2}(\dim B_j) \leq \dim B_{j_0}$. ცხადია, რომ $B_j \subset B_{j_0}^*$, ე.ი. (2) დამტკიცებულია, საიდანაც გამომდინარეობს:

$$m(E) \leq \sum m(B_k^*) = 5^n \sum m(B_k),$$

რაც ამტკიცებს ლემას.

თეორემა 1–ის დამტკიცება: განსაზღვროთ E_α შემდეგნაირად:

$$E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}.$$

Mf –ის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x \in E_\alpha$ არსებობს ბირთვი B_x ცენტრით x, ისეთი რომ

(3) $$\int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha m(B_x).$$

ერთის მხვრივ (3)–დან გამომდინაეობს, რომ $m(B_x) < \frac{1}{\alpha}\|f\|_1$ ყოველი ასეთი $x-$ თვის, მეორე მხვრივ, როცა x „გაირბენს“ E_α, შესაბამისი B_x გაერთიანება დაფარავს E_α. მაშასადამე, თუ გამოვიყენებთ ლემას დაფარვების შესახებ, ამ ოჯახიდან შეიძლება გამოვყოთ ისეთი წყვილ–წყვილად თანაუკვეთი ბირთვთა მიმდევრობა $\{B_k\}$, რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(B_k) \geq Cm(E_\alpha).$$

(მაგალითად, $C = 5^{-n}$). თუ თითოეულ ბირთვზე გამოვიყენებთ (3)–ს და მერე (4)–ს, მივიღებთ

$$\int_{\cup B_k} |f(y)|\,dy > \alpha \sum_k m(B_k) \geq \alpha C m(E_\alpha).$$

უტოლობის პირველი წევრი მაჟორირდება $\|f\|_1$–ით; თუ $A = \dfrac{1}{C}$, მივიღებთ თეორემის **ბ)** დებულებას (და, შესაბამისად, – **ა)** დებულებას $p=1$–თვის).

ახლა დავამტკიცოთ ერთდროულად **ა)** ($(Mf)(x)$–ის თითქმის ყველგან სასრულობა) და **გ)** (L^p–უტოლობა), თუ $1 < p \leq \infty$. შემთხვევა $p = \infty$ ტრ ივიალურია. ამ შემთხვევაში $A_\infty = 1$. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $1 < p < \infty$. განსაზღვროთ $f_1(x)$ შემდეგნაირად: $f_1(x) = f(x)$, თუ $|f(x)| \geq \dfrac{\alpha}{2}$ და $f_1 = 0$ – წინააღმდეგ შემთხვევაში, მაშინ მივიღეთ შემდეგ უტოლობებს

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2} \text{ და } |M(f)x)| \leq |M(f_1)x)| + \frac{\alpha}{2}.$$

ასე რომ

$$\{x : M(f)(x) > \alpha\} \subset \left\{x : M(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

და

$$m(E_\alpha) = m\{x : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{2A}{\alpha} \|f_1\|_1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

(4) $$m(E_\alpha) = m\{x : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{2A}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f|\,dx.$$

ბოლო უტოლობა მიიღება თეორემის **ბ)** დებულების ძალით, ვინაიდან $f_1 \in L^1$, როცა $f \in L^p$. ახლა ვიგულისხმოთ $g = M(f)$, და ვთქვათ g–ს განაწილების ფუნქცია არის λ, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_{R^n} (Mf)^p\,dx = -\int_0^\infty \alpha^p\,d\lambda(\alpha) = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha)\,d\alpha.$$

კერძოდ, (4) ძალით

$$\|Mf\|_p^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} m(E_\alpha)\,d\alpha \leq \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\frac{2A}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)|\,dx \right) d\alpha.$$

ორჯერად ინტეგრალში მოვახდინოთ ინტეგრების რიგის შეცვლა და ვაინტეგროთ ჯერ α–ს მიმართ. რადგან $p > 1$, ამიტომ შიგა ინტეგრალი ტოლია

$$\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2}\,d\alpha = \frac{|2f(x)|^{p-1}}{p-1}.$$

მაშასადამე, ორჯერადი ინტეგრალი ტოლია

$$\frac{2Ap}{p-1} \int |f| * |2f|^{p-1}\,dx = (A_p)^p \int_{R^n} |f|^p\,dx,$$

რითაც დამტკიცდა **გ)** დებულება. მუდმივის დათვლის შედეგად მივიღებთ:

$$A_p = 2\left(\frac{5^n p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 < p < \infty.$$

შედეგის დამტკიცება: ეს დამტკიცება ადვილად შეიძლება დავიყვანოთ $p=1$ შემთხვევაზე. ამისათვის ჩვენი თავდაპირველი ფუნქცია გავამრავლოთ ბირთვის მახასიათებელ ფუნქციაზე და შემდეგ ავაგოთ ასეთი ბირთვების უსასრულო გაერთიანება, რომელებიც ამოწურავენ მთელ R^n სივრცეს. შემოვიღოთ f_r ფუნქცია:

$$f_r = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy,$$

სადაც $r>0$. ცნობილია, რომ თუ $r \to 0$, მაშინ $\|f_r - f\|_1 \to 0,$ როცა $f \in L^1(R^n)$. ამიტომ შესაბამისი (r_k) მიმდევრობისთვის $(r_k \to 0)$ თითქმის ყველგან $f_{r_k} \to f$.

დარჩა დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{r\to 0} f_r(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Omega g(x) = |\limsup_{r\to 0} g_r(x) - \liminf_{r\to 0} g_r(x)|.$$

ყოველი $g \in L^1$ ფუნქციისათვის, $x \in R^n$ წერტილისათვის g_r განსაზღვრულია როგორც f_r. (Ωg –ს ვუწოდებთ $\{g_r\}$ სიმრავლის რხევას, როცა $r \to 0$) .

თუ g უწყვეტი ფუნქციაა კომპაქტური მატარებლით, მაშინ g_r თანაბრად კრებადია g -სკენ და, შესაბამისად, Ωg იგივურად 0-ის ტოლია.

თუ $g \in L^1(R^n)$, მაშინ თეორემის **ბ)** დებულების თანახმად

$$m\{x : \Omega g(x) > \varepsilon\} \le \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1 .$$

ცხადია, რომ

$$\Omega g(x) \le 2Mg(x).$$

მაშასადამე,

(5) $$m\{x : \Omega g(x) > \varepsilon\} \le \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1 , g \in L^1(R^n).$$

ნებისმიერი ფუნქცია $f \in L^1(R^n)$ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით: $f = h + g$, სადაც h უწყვეტია და კომპაქტური მატარებლით და g –ს ნორმა L^1 სივრცეში, შეიძლება ავიღოთ ჩვენი შეხედულებისამებრ საკმაოდ მცირე, ამასთან $\Omega f \le \Omega g + \Omega h$ და $\Omega h = 0$ h ფუნქციის უწყვეტობის გამო. ამიტომ (5)–დან გამომდინარეობს:

$$m\{x : \Omega f > \varepsilon\} \le \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1 .$$

რადგან g -ს ნორმა შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\Omega f = 0$ თითქმის ყველგან . აქედან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{r\to 0} f_r(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან.

§2 ზომადი სიმრავლის ყოფაქცევა მისი ნებისმიერი წერტილის მიდამოში

ვთქვათ E -ზომადი სიმრავლეა და $x \in R^n$. ვიტყვით რომ $x \in E$ სიმკვრივის წერტილია, თუ

(6) $$\lim_{r\to 0} \frac{m\{E \cap B(x,r)\}}{m(B(x,r))} = 1.$$

ყოველ x წერტილში ზღვარი შეიძლება არ იყოს 1 ტოლი; შეიძლება საერთოდ არ არსებობდეს. თუ (6)–ის მარცხენა მხარე 0-ის ტოლია, მაშინ განსაზღვრებით x არის, E–ს დამატების სიმკვრივის წერტილი.

ვთქვათ F არის ჩაკეტილი სიმრავლე R^n-ში და $\delta(x)=\delta(x,F)-$ით აღვნიშნოთ მანძილი x წერტილიდან F-მდე. ცხადია, $\delta(x)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x\in F$. თუ $x\in F$, მაშინ $\delta(x+y)\le|y|$. მართლაც, რადგან $x\in F$ და მანძილი $(x+y)-$დან $x-$მდე ტოლია $|y|-$ის. საზოგადოდ, მანძილის ასეთი შეფასება შეიძლება გაუმჯობესდეს, კერძოდ, $\delta(x+y)=o(|y|)$ თითქმის ყველა $x\in F-$თვის.

წინადადება 1. ვთქვათ F ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშინ $\delta(x+y)=o(|y|)$ თითქმის ყველა $x\in F-$თვის; კერძოდ, ეს დებულება სამართლიანია როცა x არის F სიმკვრივის წერტილი.

ვთქვათ x არის F სიმკვრივის წერტილი და დასახელებულია $\varepsilon>0$. განვიხილოთ „პატარა“ ბირთვი ცენტრით $x+y$ და რადიუსით $\varepsilon|y|$ და „დიდი“ ბირთვი ცენტრით x და რადიუსით $y+\varepsilon|y|$. ცხადია, რომ $B(x+y,\varepsilon|y|)\subset B(x,|y|+\varepsilon|y|)$. თუ $|y|$ საკმარისად მცირეა, მაშინ არსებობს $z\in F$, ისეთი რომ $z\in B(x+y,\varepsilon|y|)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $F\cap B(x+y,\varepsilon|y|)=\emptyset$ და

$$\frac{m(F\cap B(x,|y|+\varepsilon|y|))}{m(B(x,|y|+\varepsilon|y|))}\le\frac{m(B(x,|y|+\varepsilon|y|))-m(B(x+y,\varepsilon|y|))}{m(B(x,|y|+\varepsilon|y|))}\le 1-\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n,$$

რაც ეწინააღმდეგება (6)–ს საკმარისად მცირე $|y|-$თვის. მაშასადამე, არსებობს წერტილი $B(x+y,\varepsilon|y|)\cap F$ სიმრავლიდან. აქედან გამომდინარეობს, რომ შეიძლება მოიძებნოს F-დან წერტილი, რომლიდან მანძილი $x+y$ წერტილამდე ნაკლებია $\varepsilon|y|$, ე.ი. $\delta(x+y)\le\varepsilon|y|$.

§3 მარცინკევიჩის ინტეგრალი

ვთქვათ F ჩაკეტილი სიმრავლეა და $\delta(x)$ არის მანძილი x-დან F-მდე. განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\int_{|y|\le 1}\frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}}dy.$$

თეორემა 2:

ა) თუ $x\in F^c$, მაშინ $I(x)=\infty$;

ბ) თითქმის ყველა $x\in F$, $I(x)<\infty$.

ა) წინადადების სამართლიანობა ცხადია, ვინაიდან F-ის დამატება ღია სიმრავლეა. ამასთან, თუ $x\in F^c$, მაშინ $\delta(x+y)\ge c>0$ y რომელიღაც მიდამოსთვის.

ეს თეორემა იქნება შემდეგი ლემის შედეგი, რომელიც მოგვცემს იგივე საკითხის უფრო შინაარსიან წარმოდგენას.

ლემა. ვთქვათ F-ჩაკეტილი სიმრავლეა, რომლის დამატებას აქვს სასრული ზომა, ხოლო $\delta(x)$ არის მანძილი x-დან F-მდე; თუ $I_*\equiv\int_{R^n}\frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}}dy$, მაშინ $I_*<\infty$ თითქმის ყველა $x\in F$; უფრო მეტიც:

$$\int_F I_*(x)dx\le cm(F^c).$$

დამტკიცება:

$$\int_F I_*(x)dx=\int_F\int_{R^n}\frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}}dydx=\int_F\int_{R^n}\frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}}dydx=$$

$$= \int_F \int_{F^c} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dydx = \int_{F^c} \left(\int_F \frac{dx}{|x-y|^{n+1}} \right) \delta(y)dy.$$

განვიხილოთ

$$\int_F \frac{dx}{|x-y|^{n+1}} \ , y \in F^c.$$

$|x-y|$ –ის უმცირესი მნიშნელობა, როცა x გაირბენს F, არის $\delta(y)$. მაშასადამე,

$$\int_F \frac{dx}{|x-y|^{n+1}} \leq \int_{|x| \geq \delta(y)} \frac{dx}{|x|^{n+1}} \leq c(\delta(y))^{-1}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_F I_*(x)dx \leq \int_{F^c} c(\delta(y))^{-1} \delta(y)dy = cm(F^c),$$

რაც ამტკიცებს ლემას.

ამ ლემის საფუძველზე მიიღება **თორემა 2.** მართლაც, ვთქვათ B_m -ღია ბირთვია რადიუსით m და ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ამასთან, $F_m = F \cup B_m^c$, მაშინ F_m ჩაკეტილია, თანაც მის დამატებას აქვს სასრული ზომა (ვინაიდან ის B_m ბირთვშია). ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ უკანასკნელი ლემა. δ_m –ით აღვნიშნოთ მანძილი F_m -მდე და δ -თი – მანძილი F -მდე. შევნიშნოთ, რომ $\delta(x+y) = \delta_m(x+y)$, თუ $|y| \leq 1$ და $x \in B_{m-2}$, მაშინ ლემის საფუძველზე $I(x) < \infty$ თითქმის ყველა $x \in F \cap B_{m-2}$. თუ m მიისწრაფის ∞ -სკენ, მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

§4 R^n დაშლა ღია კუბებად

თეორემა 3: ვთქვათ f -არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციაა R^n -ში და α დადებითი სიდიდეა, მაშინ არსებობს R^n -ის ისეთი დაშლა, რომ

ა) $R^n = F \cup \Omega, F \cup \Omega = \emptyset$;

ბ) $f(x) \leq \alpha$ თითქმის ყველგან F -ზე;

გ) Ω არის თანაუკვეთი კუბების გაერთიანება – $\Omega = \bigcup_k Q_k$, ამასთან, თითოეული Q_k –თვის სამართლიანია უტოლობა:

(7) $$\alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n \alpha.$$

დამტკიცება: R^n დავყოთ ერთნაირ კუბებად, რომლებიც არ იკვეთება და მათი დიამეტრები იმდენად დიდია, რომ $\frac{1}{m(Q^{'})} \int_{Q^{'}} fdx \leq \alpha$, თითოეული კუბისათვის ბადიდან. ვთქვათ $Q^{'}$ ფიქსირებული კუბია ბადიდან. $Q^{'}$ დავყოთ 2^n კონგრუენტულ კუბებად, რომლებიც მიიღება წიბოების შუაზე გაყოფით. ვთქვათ $Q^{''}$ რომელიღაც კუბია ამ დაყოფიდან, ე.ი. გვაქვს ორი შემთხვევა:

1) $\frac{1}{m(Q^{''})} \int_{Q^{''}} fdx \leq \alpha;$

2) $\frac{1}{m(Q^{''})}\int\limits_{Q^{''}} fdx > \alpha.$

მე-2 შემთხვევაში $Q^{''}$ კუბს აღარ ვყოფთ და ეს კუბი შეიძლება ჩავთვალოთ ერთ-ერთ Q_k –ად, რომელიც მონაწილეობს თეორემის ჩამოყალიბებაში. $Q^{''}$-სთვის (7) უტოლობა სრულდება ვინაიდან

(8) $$\alpha < \frac{1}{m(Q^{''})}\int\limits_{Q^{''}} fdx \le \frac{1}{2^{-n} m(Q^{'})}\int\limits_{Q^{'}} fdx \le 2^n \alpha.$$

პირველ შემთხვევაში ჩვენ განვაგრძოთ $Q^{''}$–ს დანაწილებას და ვაგრძელებთ ამ პროცესს მანამ, სანამ არ დავალთ მე-2 შემთხვევაზე (თუ საერთოდ დავალთ მასზე). შემოვიღოთ აღვნიშვნა $\Omega = \bigcup_k Q_k$ – კუბების გაერთიანება, რომელიც მიიღება მე-2 შემთხვევაში, ამასთანავე პროცესი იწყება ყველა შესაძლო $Q^{'}$ კუბებიდან თავდაპირველი ბადიდან. დავამტკიცოთ რომ $f(x) \le \alpha$ თითქმის ყველგან $F = \Omega^c$. მართლაც, ლებეგის თეორემის ძალით, ინტეგრალის დიფერენცირებადობის შესახებ, თითქმის ყველა $x \in F$ –თვის:

$$f(x) = \lim_{Q} \frac{1}{m(Q)}\int\limits_{Q} f(y)dy,$$

სადაც ზღვარი განიხილება ისეთი Q კუბების მიმართ, რომელებიც შეიცავენ x წერტილს და რომლის დიამეტრი მიისწრაფის 0-სკენ. მაგრამ ყოველი ასეთი კუბი, რომელიც შედის ჩვენს დაშ,ლაში და შეიცავენ x –ს, არის კუბი რომლისთვისაც სამართლიანია 1) შემთხვევას. ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი: ვთქვათ f, α, F, Ω და Q_k აქვს იგივე შინაარსი, რაც – ზემოთ მოყვანილ თეორემაში. მაშინ არსებობს ორი მუდმივი A და B (რომელებიც დამოკიდებულია მხოლოდ n-განზომილებაზე) ისეთი, რომლისთვიაც სამართლიანია **1)** და **2)** თვისება და

ა) $m(\Omega) \le \frac{A}{\alpha}\|f\|_1$;

ბ) $\frac{1}{m(Q_k)}\int\limits_{Q_k} fdx \le B\alpha.$

მართლაც, (8) ძალით ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ $B = 2^n$; და კვლავ (7) ძალით

$$m(\Omega) = \sum m(Q_k) < \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Omega} f(x)dx \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_1,$$

რითაც დამტკიცდა შედეგი, როცა $A = 1$ და $B = 2^n$.

§5 ინტერპოლაციის თეორემა L^p –სათვის

შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებები. ვთქვათ T ასახვაა $L^p(R^n)$-დან $L^q(R^n)$-ში და $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$. ვიტყვით რომ T ასახვა (p,q) ტიპისაა, თუ

(8) $$\|Tf\|_q \le A\|f\|_p\ ,\ f \in L^p(R^n),$$

სადაც A არ არის დამოკიდებული f-ზე. ანალოგიურად, ვიტყვით, რომ ასახვა არის სუსტი (p,q) ტიპის, თუ

(9) $$m\{x:|Tf(x)>\alpha|\}\le\left(\frac{A\|f\|_p}{\alpha}\right)^q,\ q<\infty,$$

სადაც A არ არის დამოკიდებული f -ზე და $\alpha>0$.

შევნიშნოთ რომ (8)–დან გამომდინარეობს (9). მართლაც,

$$\alpha^p m\left\{x:|Tf(x)|>\alpha\right\}\le\int_{R^n}|Tf|^q dx=\|Tf\|_q^q\le(A\|f\|_p)^q.$$

განვსაზღვროთ $L^{p_1}(R^n)+L^{p_2}(R^n)$ სივრცე როგორც ყველა ისეთი ფუნქციების სიმრავლე, რომლისთვისაც სამართლიანია წარმოდგენა $f=f_1+f_2$, სადაც $f_1\in L^{p_1}$ და $f_2\in L^{p_2}$. დავამტკიცოთ, რომ თუ $p_1\le p\le p_2$, მაშინ $L^p(R^n)\subset L^{p_1}(R^n)+L^{p_2}(R^n)$. დაუშვათ, რომ $f\in L^p(R^n)$ და γ ფიქსირებული დადებითი სიდიდეა. ვთქვათ,

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x),\text{თუ } |f(x)|>\gamma,\\0,\text{ თუ } |f(x)|\ge\gamma,\end{cases}\qquad\text{და}\qquad f_2(x)=\begin{cases}f(x),\text{ თუ } |f(x)|\le\gamma,\\0,\text{ თუ } |f(x)|>\gamma.\end{cases}$$

მაშინ

$$\int|f_1(x)|^{p_1}dx=\int|f_1(x)|^p\,|f_1(x)|^{p_1-p}\,dx\le\gamma^{p_1-p}\int|f(x)|^p dx.$$

ანალოგიურად,

$$\int|f_2(x)|^{p_2}dx=\int|f_2(x)|^p|f_2(x)|^{p_2-p}dx\le\gamma^{p_2-p}\int|f(x)|^p dx$$

ასე რომ

$$f_1\in L^{p_1},\quad f_2\in L^{p_2}\text{ და } f=f_1+f_2.$$

თეორემა 4: ვთქვათ ყოველი $f,g\in L^1(R^n)+L^r(R^n)$ სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $|T(f+g)(x)|\le|Tf(x)|+|Tg(x)|$,

ბ) $m\left\{x:|Tf(x)|>\alpha\right\}\le\dfrac{A_1}{\alpha}\|f\|_1,\ f\in L^1(R^n),$

გ) $m\left\{x:|Tf(x)|>\alpha\right\}\le\left(\dfrac{A_r}{\alpha}\|f\|_r\right)^r,\ f\in L^r(R^n).$

მაშინ

$$\|T(f)\|_p\le A_p\|f\|_p,\ f\in L^p(R^n),$$

სადაც $1<p<r$ და A_p არ არის დამოკიდბულია მხოლოდ $A_1,\ A_2,\ p$ და r.

დამტკიცება: ვთქვათ $f\in L^p(R^n)$. ჩვენ გვინდა შევაფასოთ განაწილების ფუნქცია $\lambda(\alpha)=m\{x:|Tf(x)|>\alpha\}$. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, f შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $f=f_1+f_2$ ისე, რომ $f_1\in L^{p_1}$ და $f_r\in L^{p_r}$. დავაფიქსიროთ $\gamma=\alpha$.

ვინაიდან

$$|T(f)x|\le|Tf_1(x)|+|Tf_2(x)|$$

ამიტომ $m\left\{x:|Tf(x)|>\alpha\right\}\le\left\{x:\left|Tf_1(x)>\dfrac{\alpha}{2}\right|\right\}\cup\left\{x:|Tf_2|>\dfrac{\alpha}{2}\right\}$. ასე რომ

$$\lambda(\alpha)=m\left\{x:|Tf(x)|>\alpha\right\}\le m\left\{x:\left|Tf_1(x)>\frac{\alpha}{2}\right|\right\}+m\left\{x:|Tf_2|>\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

ამრიგად, **ა)** და **ბ)** ძალით მივიღებთ:

$$\lambda(\alpha) \le \frac{A_1}{\alpha/2}\int |f_1(x)| dx + \frac{A_r^r}{(\alpha/2)^r}\int |f_2(x)|^r dx.$$

f_1 და f_2 განმარტების ძალით მივიღებთ:

(10) $$\lambda(\alpha) \le \frac{A_1}{\alpha/2}\int\limits_{|f|>\alpha} |f| dx + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r}\int\limits_{|f|\le\alpha} |f(x)|^r dx.$$

ჩვენთვის ცნობილია, რომ

$$\int\limits_{R^n} |Tf|^p dx = -\int\limits_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha) = p\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha.$$

(10) გამოსახულების ორივე მხარე გავამრავლოთ $p\alpha^{p-1}$ და ვაინტეგროთ α –ს მიმართ. შევნიშნოთ, რომ თუ $p>1$ მაშინ

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-1}\left\{\int\limits_{|f|>\alpha} |f| dx\right\}d\alpha = \int\limits_{R^n} |f|\int\limits_0^{|f|} \alpha^{p-2}d\alpha dx = \frac{1}{p-1}\int\limits_{R^n} |f||f|^{p-1} dx.$$

ანალოგიურად,

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-r}\left\{\int\limits_{|f|\le\alpha} |f|^r dx\right\}d\alpha = \int\limits_{R^n} |f|^r\int\limits_f^\infty \alpha^{p-1-r}d\alpha dx = \frac{1}{r-p}\int\limits_{R^n} |f|^r|f|^{p-r} dx \ \ (p<r).$$

ამ ორი გამოსახულების შეკრებით მივიღებთ:

$$\|T(f)\| \le A_p \|f\|_p ,$$

სადაც $(A_p)^p = \dfrac{2A_1}{p-1} + \dfrac{(2A_r)^r}{r-p}.$

თავი II
სინგულარული ინტეგრალები

§1 ჰარმონიული ანალიზის ზოგიერთი ასპექტი R^n-ში

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ ზოგიერთი ფაქტი R^n-ის ჰარმონიული ანალიზში. ამ საკითხების განზოგადეობა შეიძლება, თუ განვიხილავთ ლოკალურ კომპაქტურ აბელის ჯგუფებს. განვიხილოთ $C_0(R^n)$ სივრცე, რომელიც შედგება ისეთი უწყვეტი ფუნქციებისგან, რომლებიც უსასრულობაში მიისწრაფიან 0-სკენ და მათი ნორმა განსაზღვრულია ზუსტი ზედა საზღვრით. ასევე განვიხილოთ მისი შეუღლებილი სივრცე $B(R^n)$, რომელიც გაიგივებულია ბანახის სივრცესთან, სასრული $d\mu$ ზომით და ნორმით $\| d\mu \| = \int\limits_{R^n} |d\mu|$. $L^1(R^n)$ შეიძლება გავაიგივოთ $B(R^n)$ ქვესივრცესთან, იზომეტრიული ასახვით $f(x) \to f(x)dx$, სადაც dx არის ლებეგის ზომა.

ძირითადი ოპერაცია გვექნება ნახვევი. ვთქვათ $\mu_1, \mu_2 \in B.$ ნახვევის ოპერაცია $\mu = \mu_1 * \mu_2$ განსაზღვროთ შემდენაირად:

$$\mu(f) = \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} f(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1, \; \|\mu\| \le \|\mu_1\| \cdot \|\mu_2\|.$$

თუ ერთი თანამამრავლი ეკუთნის $L^1(R^n)$, მაშინ ნახვევიც ეკუთნის $L^1(R^n)$; თუ $f \in L^1(R^n)$, მაშინ ინტეგრალი $g = f * \mu = \int\limits_{R^n} f(x-y) d\mu(y)$ კრებადია თითქმის ყველა x-სათვის და $g \in L^1(R^n)$. ამასთანავე

$$\| g \| \le \| f \|_1 \| \mu \|.$$

ანალოგიურად, თუ $f \in L^p(R^n)$, მაშინ $\int\limits_{R^n} f(x-y) d\mu(y)$, ასევე ეკუთნის L^p–ს და $\| g \|_p \le \| f \|_p \| \mu \|$. შევნიშნოთ, რომ თუ $\mu \in B$, მაშინ გარდაქნა –

$$f \to \int f(x+y) d\mu(y),$$

რომელიც არის შემოსაზღვრული $L_p(R^n)$, ასევე დაკავშირებულია გაჭიმვასთან $x \to x+h$. გარდაქმნის ეს კლასი აღიწერება შემდეგი წინადადებით:

წინადადება 2. ვთქვათ T შემოსაზღვრული წრფივი ასახვაა $L^1(R^n)$-დან $L^1(R^n)$-ში. იმისათვის, რომ T დაკავშირებული იყოს გაჭიმასთან აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს ზომა μ, რომელიც ეკუთნის $B(R^n)$, ამასთან $T(f) = f * \mu$, ყოველი $f \in L^1(R^n)$–თვის. ამასთანავე $\|T\| = \|\mu\|$. ყოველი $\mu \in B(R^n)$ ზომისათვის განსაზღვროთ ფურიეს გარდაქმნა $\hat{\mu}(y)$ შემდეგი ტოლობით:

$$\hat{\mu}(y) = \int\limits_{R^n} e^{2\pi i x y} d\mu(y).$$

კერძოთ, ყოველი $f \in L^1(R^n)$–თვის ფურიეს გარდაქმნა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\hat{f}(y)=\int_{R^n} e^{2\pi ixy} f(x)dx \in C_0(R^n).$$

ფურიეს გარდაქმნას აქვს შემდეგი თვისებები: თუ $\mu=\mu_1 * \mu_2$, მაშინ $\hat{\mu}(y)=\hat{\mu}(y) * \hat{\mu}(y)$, ვთქვათ $f\in L^1(R^n)\cap L^2(R^n)$, მაშინ $\hat{f}\in L^2(R^n)$ და $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$. ამიტომ ფურიეს გარდაქმნა შეიძლება გავარცელოთ უწყვეტად უნიტარულ ასახვამდე, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $L^2(R)$ სივრცეზე. უწყვეტობიდან ჩვენ ასევე ვიღებთ, რომ თუ $g=f*\mu,$ სადაც $f\in L^2(R^n)$ და $\mu\in B(R^n)$, მაშინ $\hat{g}(y)=\hat{f}(y)\hat{\mu}(y)$.

შემდეგი თეორემა არის წინადადება 1-ის ანალოგიური L^2 სივრცისათვის.

წინადადება 3: ვთქვათ T შემოსაზღვრული წრფივი ასახვაა $L^2(R^n)$ სივრცეში. იმისათვის რომ T დაკავშირებული იყოს გაჭიმვასთნ აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს შემოსაზღვრული ზომადი $m(y)$ ფუნქცია (მულტიპლიკატორი), ისეთი, რომ $(\hat{Tf})(y)=m(y)\hat{f}(y)$, ყოველი $f\in L^2(R^n)$. მაშინ $\|T\|=\|m\|_\infty$.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა T შემოსაზღვრულია $L^1(R^n)$ სივრცეში, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას $m(y)=\hat{\mu}(y).$ ამასთანავე $Tf=f*\mu$.

§ 2 სინგულარული ინტეგრალები და მათი ზოგიერთი განზოგადებები და ვარიანტები

ზემოთ ჩამოყალიბებული ორი წინადადება, რომელიც გვიჩვენებს, რომ ოპერატორის სტრუქტურა, რომელიც ინვარიანტულია ძვრის მიმართ და შემოსაზღვრულია L^1-ში ან L^2-ში, მარტივია და გასაგები. ოპერატორების შესწავლა, რომლებიც ინვარიანტულია ძვრის მიმართ და შემოსაზღვრულია L^p-ში რომელიღაც $p\neq 2$ –თვის, მაგრამ არა ყოველი p-სათვის, არის უფრო რთული და დღემდე დაუმთავრებელი. მაგრამ ოპერატორთა ერთ-ერთი მნიშნელოვანი კლასისთვის უკვე ბევრია გაკეთებულია. ეს კლასი შედგება ნახვევი ოპერატორისგან სინგულარული ბირთვით, რომელსაც აქვს ერთი განსაკუთრებულობა კოორდინატთა სათავეში და უსასრულობაში. გულების შესწავლა უფრო ფართო განსაკუთრებულობით ვიდრე იზოლირებულ წერტილებია, წარმოადგენს მნიშნელოვან პრობლემას და დღემდე დაუმთავრებელია.

თეორემა 5: ვთქვათ $K\in L^2(R^n)$ და დაუშვათ სამართლიანია შემდეგი პირობები:

ა) K-ს ფურიეს გარდაქმნა არსებითად შემოსაზღვრულია:

$$|\hat{K}(x)|\leq B,$$

ბ) K ეკუთნის C^1 კლასს (კოორდინატთა სათავის გარდა) და

$$|\Delta K(x)|\leq \frac{B}{x^{n+1}}. \tag{1^0}$$

ვთქვათ, ყოველი $f\in L^1\cap L^p$ სრულდბა

$$(Tf)(x)=\int_{R^n} K(x-y)f(y)dy.$$

მაშინ არსებობს მუდმივი A_p, ისეთი, რომ

$$\| T(f) \|_p \le A_p \| f \|_p, 1 < p < \infty.$$

აქედან გამომდინარე, T ოპერატორი შეიძლება უწყვეტად გავაფართოვოთ მთელ L^p-ზე. მუდმივი A_p დამოკიდებულია მხოლოდ p, B და n განზომილებაზე, კერძოდ, ის დამოკიდებულია K-ს ნორმაზე L^2-ში.

ამ თეორემის პირობები ორი სხვადასხვა ტიპისაა. თეორემის **ა)** პირობა, რომელიც დაკავშირებულია L^2-ის თეორიასთან, ჩამოყალიბებულია ზოგად ფორმაში, თუმცა არც თუ ისე მოხერხებულად. თეორემის **ბ)** პირობა, რომელიც, როგორც წესი დაკავშირებულია სუსტი (1,1) ტიპთან, შეიძლება გაუმჯობესებული იქნას. ეს გაუმჯობესობა საინტერესოა იმით, რომ ის გავძლევს ყველაზე სუსტ მოთხოვნას. ეს პირობა შემდეგში მდგომარეობს:

(1⁰⁰) $$\int_{|x| \ge 2|y|} | K(x-y) - K(x) | dx \le B', \; |y| > 0.$$

ცხადია რომ **ბ)** პიორობიდან გამომდინარეობს (1⁰⁰).

შედეგი 1: თეორემა 5-ის შედეგები სამართლიანია თუ (1⁰) უტოლობას შევცვლით (1⁰⁰)–ით და B ჩავანაცვლებთ B'–ით.

თეორემა 6: ვთქვათ $K(x)$ ბირთვისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

(11) $$| K(x) | \le B |x|^{-n}, \; 0 < |x|,$$

$$\int_{|x| \ge 2|y|} | K(x-y) - K(x) | dx \le B, \; 0 < |y|,$$

(12) $$\int_{R_1 < |x| < R_2} K(x) dx = 0, \; 0 < R_1 < R_2 < \infty.$$

თუ $f \in L_p(R^n)$, სადაც $1 < p < \infty$, ვთვლით, რომ

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y| \ge \varepsilon} f(x-y) K(y) dy, \; \varepsilon > 0.$$

მაშინ

(13) $$\| T_\varepsilon \|_p \le A_p \| f \|_p,$$

სადაც A_p არ არის დამოკიდებული f–ზედა ε–ზე, ამასთანავე ყოველი $f \in L_p(R^n)$ ფუნქციისათვის არსებობს $\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ L_p აზრით.

ასეთნაირად განსაზღვრული T ოპერატორი აკმაყოფილებს (13) უტოლობას. შემოსაზღვრულობა L_2 აზრით მტკიცდება შემდეგ ლემაში.

ლემა: ვთქვათ K აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილი თეორემის პირობებს B მუდმივით. ვიგულისხმოთ, რომ

$$K_\varepsilon = \begin{cases} K(x), \text{ თუ } |x| \ge \varepsilon, \\ 0, \text{ თუ } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

მაშინ, ცხადია, $K_\varepsilon \in L_2(R^n)$. ფურიეს გარდაქმნისთვის სამართლიანია შეფასება

(14) $$\sup_y | \hat{K_\varepsilon}(y) | \le CB, \; \varepsilon > 0,$$

სადაც C დამოკიდებულია მხოლოდ n-ის განზომილებაზე.

დავამტკიცოთ (14) უტოლობა $\varepsilon = 1$ შემთხვევისთვის.

შევნიშნოთ, რომ K_1 აკმაყოფილებს (11) და (12) პირობებს. ამასთან, მუდმივი უნდა შეიცვალოს CB–თი, სადაც C დამოკიდებულია მხოლოდ n– განზომილებაზე.

$$\hat{K}_1(y)=\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} e^{2\pi ixy}K_1(x)dx=\int_{|x|\le 1/y} e^{2\pi ixy}K_1(x)dx+\lim_{R\to\infty}\int_{1/y\le|x|\le R} e^{2\pi ixy}K_1(x)dx=I_1+I_2.$$

თუ გავითვლისწინებთ რომ K_1 აკმაყოფილებს (12) პირობას, მაშინ სრულდება ტოლობა:

$$\int_{|x|\le 1/y} e^{2\pi ixy}K_1(x)dx=\int_{x|\le 1/y}[e^{2\pi ixy}-1]K_1(x)dx,$$

და (11)–ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$I_1\le C|y|\int_{|x|\le 1/y}|x||K_1(x)|dx\le C'B.$$

I_2–ის შეფასებისთვის ამოვარჩიოთ ისეთი $z=z(y)$, რომ $e^{2\pi ixz}=-1$, მაგალითად, შეიძლება ავიღოთ $z=y/2|y|^2$. მაშინ $|z|=1/2|y|$ და

$$\int_{R^n}K_1(x)e^{2\pi iyz}dx=\frac{1}{2}\int_{R^n}[K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi iyz}dx.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{1/y\le|x|\le R} e^{2\pi ixy}K_1(x)dx=\frac{1}{2}\int_{1/y\le|x|\le R}[K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi iyz}dx-\frac{1}{2}\int_{\left\{\substack{1/|y|\le|x+z|\\ |x|\le 1/|y|}\right\}}K_1(x)e^{2\pi ixy}dx.$$

ბოლო ინტეგრალი აიღება არეზე, რომელიც მოთავსებულია სფეროში $1/2|y|\le|x|\le 1/|y|$ და შემოსაზღვრულია ვინაიდან $|K_1(x)|\le B|x|^{-n}$. მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი მაჟორირდება შემდეგი გამოსახულებით: $\frac{1}{2}\int_{|x|\ge 1/|y|}[K_1(x-z)-K_1(x)]dx$. რადგან $|z|=1/2|y|$, მაშინ (11)-ის ანოლაგიური პირობა, რომელიც გამოიყენება K_1-სთვის, გვიჩვენებს რომ ეს ინტეგრალი შემოსაძღვრულია CB მუდმივით. თუ გავითვალისწინებთ I_1 და I_2 შეფასებას, მივიღებთ ლემის სამართლინობას K_1-სათვის.

იმისათვის, რომ გადავიდეთ K_ε შემთხვევაზე, გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა. ვთქვათ τ_ε არის ε-ჯერ გაჭიმვა, $\varepsilon>0$, ე.ი. $(\tau_\varepsilon f)=f(\varepsilon x)$. თუ T არის ნახვევის ოპერატორი $T(f)=\varphi*f=\int_{R^n}\varphi(x-y)f(y)dy$, მაშინ $\tau_{1/\varepsilon}T\tau_\varepsilon$ არის ნახვევის ოპერატორი φ_ε გულით, სადაც $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. ჩვენ შემთხვევაში, თუ T-ს შეესაბამება ბირთვი $K(x)$, მაშინ $\tau_{1/\varepsilon}T\tau_\varepsilon$ ეთანადება $\varepsilon^{-n}K(\varepsilon^{-1}x)$ ბირთვი. შევნიშნოთ, თუ K აკმაყოფილეფბს თეორემის პირობებს, მაშინ $\varepsilon^{-n}K(\varepsilon^{-1}x)$ ასევე აკმაყოფილებს ამ პირობებს იგივე მუდმივებით. წინასწარ დასახელებული K-სათვის ვიგულისხმოთ, რომ $K'=\varepsilon^nK(\varepsilon x)$, მაშინ K' აკმაყოფილებს ლემის პირობებს იგივე B მუდმივით, ე.ი. თუ

$$K'=\begin{cases}K', \text{თუ}\ |x|>1,\\ 0,\ \text{თუ}\ |x|<1,\end{cases}$$

მაშინ $|\hat{K}'(y)|\le CB$. $\varepsilon^{-n}K_1'(\varepsilon^{-1}x)$–ის ფურიეს გარდაქმნა არის $\hat{K}_1'(\varepsilon y)$ და ის ასევე შემოსაზღვრულია CB მუდმივით, მაგრამ $\varepsilon^{-n}K_1'(\varepsilon^{-1}x)=K_\varepsilon(x)$. მაშასადამე, ლემა მთლიანად დამტკიცდა.

გადავიდეთ თეორემის დამტკიცებაზე. ვინაიდან K აკმაყოფილებს (11) და (12) პირობას, მაშინ $K_\varepsilon(x)$ აკმაყოფილებს იგივე პირობებს და მუდმივებით, რომლებიც არ აღემატება CB–ს.

K_1-დან K_ε-ზე გადასვლა ხერხდება გაჭიმვის გამოყენებით, რომელიც აღნიშნული იყო ლემის დამტკიცების დროს. ცხადია, რომ ყოველი ბირთვი $K_\varepsilon \in L^2(R^n)$, $\varepsilon > 0$. მაშასადამე, თუ გამოვიყენებთ შედეგს 1-ს, მაშინ მივიღებთ (13) უტოლობის დამტკიცებას, ე.ი. ოპერატორები თანაბრად შემოსაზღვრულია L^p ნორმით. ვთქვათ f_1 უწყვეტი ფუნქციაა კომპაქტური მატარებლით, რომელსაც აქვს პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები. მაშინ (11) პირობის ძალით

$$T_\varepsilon(f_1)(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} K(y) f_1(x-y)dy = \int_{|y|\geq 1} K(y) f_1(x-y)dy + \int_{1\geq|y|\geq\varepsilon} K(y)[f_1(x-y) - f_1(x)]dy.$$

პირველი ინტეგრალი არის ფუნქცია L^p-დან, ვინაიდან ეს არის ნახვევი ფუნქციებისა L^1-დან და $K(y)$ ფუნქციისა L^p-დან, რადგან $|K(y)| \leq B|y|^{-n}$, თუ $|y| \geq 1$. მეორე ინტეგრალს აქვს ფიქსირებული კომპაქტური მატარებელი და რადგან $|f_1(x-y) - f_1(x)| \leq A|y|$ (f_1–ის დიფერენცირებადობის გამო) თანაბრად კრებადია x-ის მიმართ, რაცა $\varepsilon \to 0$. საბოლოოდ ვასკვნით, რომ $T_\varepsilon(f_1)$ კრებადია L_p ნორმით, როცა $\varepsilon \to 0$.

ნებისმიერი ფუნქცია $f \in L^p$ შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $f = f_1 + f_2$, სადაც f_1 იგივე ტიპისაა, რაც ზემოთ იყო აღწერილი და $\| f_2 \|_p$ არის „რაგინდ მცირე". თუ (13) უტოლობას გამოვიყენებთ f_2-თვის, მივიღებთ, რომ $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)$ არსებობს L^p აზრით. ამიტომ ზღვრული ოპერატორი T ასევე აკმაყოფილებს (13) უტოლობას. ამით თეორემა 4 დამტკიცებულია.

§3 სინგულარული ინტეგრალები, რომლებიც დაკავშირებულია კუმშვასთან

ძირითად ოპერატორთა კლასს ნებისმიერ აბელის ჯგუფში წარმოადგენს ოპერატორთა ოჯახი, რომლებიც დაკავშირებულია ძვრასთან (ჯგუფზე). მაგრამ R^n არის არამარტო აბელის ჯგუფი, რომელსაც აქვს ძვრის თვისება, არამედ გააჩნია უამრავი სხვა თვისება. ჩვენ მხედველობაში გვაქს კუმშვა $\tau_\varepsilon : x \to \varepsilon x, \varepsilon > 0$ და, შესაბამისად, ფუნქციის გარდაქმნის კუმშვა: $\tau_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$. ჩვენ გვაინტერესებს ისეთი ოპერატორები, რომლებიც დაკავშირებულია არამარტო ძვრასთან, არამედ კუმშვასთანაც. მათ რიცხვში ჩვენ შევისწავლით სინგულარულ ინტეგრალურ ოპერატორებს, რომელისთვისაც სამართლიანია თეორემა 7 (იხ. ქვემოთ). თუ T ოპერატორს შეესაბამება $K(x)$ ბირთვი, მაშინ (როგორც აღვინიშნეთ) $\tau_{\varepsilon^{-1}} T \tau_\varepsilon$ ოპერატორს შეესაბამება $\varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)$ გული, $\varepsilon > 0$, ე.ი. K არის n რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია. ვთქვათ

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$$

სადაც Ω არის ნული რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ე.ი. $\Omega(\varepsilon x) = \Omega(x), \varepsilon > 0$. ეს პირობა ექვივალენტურია იმისა, რომ Ω მუდმივია სხივებზე, რომლებიც გამოდის საკორდინატო სათავიდან. კერძოდ, Ω მთლიანად განსაზღვრულია თავისი შევიწროებით ერთეულოვან S^{n-1} სფეროზე. შევეცადოთ თეორემა 6-ის ინტერპრიტირება Ω-ს ტერმინებში. პირველ რიგში (18)–ის ძალით $\Omega(x)$ ფუნქცია უნდა იყოს შემოსაზღვრული და, შესაბამისად, ჯამებადი S^{n-1}-ზე. შემცირების პირობა ექვივალენტურია პირობის:

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0,$$

სადაც $d\sigma$-ინდუცირებული ევკლიდეს ზომაა S^{n-1}-ზე. რთულია (11) პირობა გადავიყვანოთ Ω–ს ტერმინებში, მაგრამ, ცხადია, Ω-სგან მოითხოვება რაღაც სიგლუვე. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა Ω აკმაყოფილეფს შემდეგ პირობას, რომელიც ნაკარნახებია (11)-ით:

თუ $\sup\limits_{\substack{|x-x'|\le\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x)-\Omega(x_1)| = \omega(\delta)$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty. \tag{15}$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი Ω ფუნქცია C^1 არის კლასის ან რომელიც აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას მათვის სამართლიანია (15).

თეორემა 7. ვთქვათ Ω არის ნული რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია და Ω აკმაყოფილებს (24), (25) პირობებს. ვთქვათ $1<p<\infty$, $f\in L^p(R^n)$ და

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y|\ge\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy.$$

ა) მაშინ არსებობს A_p მუდმივი, რომელიც არ არის დამოკიდებული f და ε, ისეთი რომ

$$\|T_\varepsilon\|_p \le A_p \|f\|_p;$$

ბ) ზღვარი $\lim\limits_{\varepsilon\to0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ არსებობს L^p აზრით და

$$\|T(f)\|_p \le A_p \|f\|_p;$$

გ) თუ $f\in L^2(R^n)$, მაშინ f და Tf ფურიეს გარდაქმნა დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით $\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x)$, სადაც m ნული რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა. უფრო ცხადი სახით რომ ჩამოვაყალიბოთ:

$$m(x) = \int_{S^{n-1}} \left[\frac{\pi i}{2} sign(xy) + \ln\left(\frac{1}{|xy|}\right)\Omega(y)\right] d\sigma(y), \ |x|=1.$$

თუ დავამტკიცებთ, რომ ყოველი $K(x)$ გულისთვის, რომელსაც აქვს სახე $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, სრულდება უტოლობა $\int\limits_{|x|\ge2|y|} |K(x-y)-K(x)|dx \le B$ (თუ Ω აკმაყოფილებს (15) პირობას), მაშინ **ა)** და **ბ)** დებულება იქნება თეორემა 7-ის შედეგი. მართლაც,

$$K(x-y)-K(x) = \left(\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n}\right) + \Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right).$$

მეორე შესაკრები აკმაყოფილებს საჭირო შეფასებას ვინაიდან Ω ფუნქცია არის შემოსაზღვრული და

$$\int_{|x|\ge2|y|} \left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx \le C.$$

იმისათვის, რომ შევაფასოთ პირველი შესაკრები შევნიშნოთ, რომ მანძილი $(x-y)$–ისა და x–ის პროექციებს შორის ერთეულოვან სფეროზე $\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|$ არ აღემატება $C\left|\frac{y}{x}\right|$–ს, თუ $|x|\geq 2|y|$. მაშასადამე, ინტეგრალი, რომელიც შეესაბამება პირველ შესაკრებს ფასდება შემდეგი გამოსახულბით:

$$C^{'}\int \omega\left(C\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{dx}{|x|^{n}}=C^{''}\int_{0}^{c/2}\frac{\omega(\delta)}{\delta}d\delta<\infty.$$

ვინაიდან T შემოსაზღვრულია L^2–ში და დაკავშირებულია ძვრასთან, ამიტომ წინადადება 3–ის ძალით, T შეიძლება წარმოვადგინოთ m მულტიპლიკატორით, ისე რომ $(\hat{Tf})$ მიიღება f-ისა და m-ის გადამრავლებით. ასეთი ოპერატორებისთვის კუმშვის გარდაქმნა ტოლფასია ნული რიგის ერთგავაროვნებასთან. კერძოდ, ჩვენი ოპერატორებისთვის გვაქვს არამარტო m-ის არსებობა, არამედ მულტიპლიკატორის გულის ცხადი სახით წარმოდგენა. ეს ფორმულა მიიღება შემდეგნაირად. ვთქვათ $0<\varepsilon<\eta<\infty$ და

$$K_{\varepsilon,\eta}(x)=\begin{cases}\frac{\Omega(x)}{|x|^{n}}, \text{ თუ } \varepsilon\leq|x|\leq\eta,\\ 0, \text{ თუ } (-\infty;-\eta)\cup(-\varepsilon;\varepsilon)\cup(\eta;\infty).\end{cases}$$

ცხადია, რომ $K_{\varepsilon,\eta}\in L^{1}(R^{n})$. თუ $f\in L^{2}(R^{n})$, მაშინ $(K_{\varepsilon,\eta}*f)^{\wedge}=\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(y)\,\hat{f}(y)$.

დავამტკიცოთ შემდეგი ორი წინადადება:

1) $\sup|\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)|\leq A$ სადაც A არ არის დამოკიდებული ε და η.

2) თუ $x\neq 0$, მაშინ $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}}\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)=m(x)$.

ამისათვის მოხეხრხებულია შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატბი. ვთქვათ $x=Rx^{'},\ R=|x|,\ x^{'}=x/|x|\in S^{n-1}$ და $y=Ry^{'},\ R=|y|,\ y^{'}=y/|y|\in S^{n-1}$. ჩვენ ასევე დაგვჭირდება დამხმარე ინტეგრალი:

$$I_{\varepsilon,\eta}(x,y^{'})=\int_{\varepsilon}^{\eta}[\exp(2\pi iRrx^{'}y^{'})-\cos(2\pi Rr)]\frac{dr}{r},\ R>0.$$

ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით, ამ ინტეგრალის წარმოსახვითი ნაწილი – $\int_{\varepsilon}^{\eta}\sin 2\pi iR(rx^{'}y^{'})\frac{dr}{r}$ თანაბრად შემოსაზღვრულია და კრებადია სიდისისაკენ:

$$\left(\int_{0}^{\infty}\sin t\frac{dt}{t}\right)sign(x^{'}y^{'})=\frac{\pi}{2}sign(x^{'}y^{'}).$$

ნამდვილი ნაწილის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება $C\ln 1/|x^{'}y^{'}|+C$–ს. ამისა გარდა, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\mathrm{Re}(I_{\varepsilon,\eta}(x^{'}y^{'})=\ln 1/|x^{'}y^{'}|$, ვინაიდან სათანადო h ფუნქციისათვის

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{h(\lambda r)-h(\mu r)}{r}dr = h(0)\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

(ფლურენის ინტეგრალი), როცა $\mu,\lambda>0.$ ამ შემთხვევაში $h(r)=\cos 2\pi r$, $\lambda = R\,|\,x^{'}y^{'}\,|$ და $\mu = R.$ ახლა

$$\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)=\int_{S^{n-1}}\left(\int_{\varepsilon}^{\eta}e^{2\pi iRrx^{'}y^{'}}\Omega(y^{'})\frac{dr}{r}\right)d\sigma(y^{'}).$$

ვინაიდან

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(y^{'})d\sigma(y^{'})=0$$

ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ ინტეგრალი, რომელიც განსაზღვრავს $\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)$ –ს(მამრავლი $\cos 2\pi rR$ არ არის დამოკიდებული $y^{'}$ –ზე). მაშასადემე,

$$\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)=\int_{S^{n-1}}I_{\varepsilon,\eta}(x,y^{'})\Omega(y^{'})d\sigma(y^{'}).$$

$I_{\varepsilon,\eta}$ ინტეგრალის თვისების ძალით გვაქვს:

$$|\,\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)\,|\le A\int_{S^{n-1}}\left[1+\ln\frac{1}{|\,x^{'}y^{'}\,|}\right]|\,\Omega(y^{'})\,|\,d\sigma(y^{'}),$$

საიდანაც, Ω –ს შემოსაზღვრულობის გამო, გამომდინარეობს **1)** ($\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)$ –ის თანაბრად შემოსაზღვრულობა). თუ გავითვალისწინებთ ახლახან ნაპოვნ $I_{\varepsilon,\eta}(x)$ –ის ზღვარს (როცა $\varepsilon\to 0,\ \eta\to\infty$), მაშინ გამოყენებით რა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის ლებეგის თეორემას, დავასკვნით, რომ

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}K_{\varepsilon,\eta}(\hat{x})=mx,$$

როცა $x\neq 0.$ ამრიგად, სამართლიანია **2)**.

ამის გარდა, პლანშერელის თეორემის ძალით, თუ $f\in L^2(R^n)$, მაშინ $K_{\varepsilon,\eta}*f$ კრებადია L^2 -ში, როცა $\varepsilon\to 0,\eta\to\infty;$ ამასთან, ამ ზღვრის ფურიეს გარდაქმნა არის $m(x)\,\hat{f}(x)$. მაგრამ, თუ ε ფიქსირებულია და $\eta\to\infty,$ მაშინ $\int K_{\varepsilon,\eta}(y)f(x-y)dx$ ინტეგრალი ყველგან კრებადია $\int_{|y|\le\varepsilon}K(y)f(x-y)dy$ –სკენ, ე.ი $T_{\varepsilon}(f)$ -სკენ. ახლა საკმარისია ε მივასწრაფოთ 0-კენ. მაშინ მივიღებთ დებულების **გ)** ნაწილს, რითაც მთავრდება თეორემის მტკიცება.

ლიტერატურა

1. E. M. Stein, Singulars Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
2. E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1971.
3. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа. Издательство "Наука " Главная Редакция Физико-математической Литературы Москва, 1976.