ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

მედეა ცაავა

დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული სასაზღვრო ამოცანები ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბრტყელ არეში კუთხოვანი საზღვრით

მათემატიკის მიმართულება

მაგისტრი

ხელმძღვანელი: როლანდ დუდუჩავა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი,
ა.რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი
მეცნიერ-თანამშრომელი

თბილისი, 2013

Contents

ანოტაცია

ჩვენი მიზანია გამოვიკვლიოთ დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული სასაზღვრო ამოცანები ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბრტყელ $\Omega_{\alpha_1,\dots\alpha_n}$ არეში კუთხოვანი საზღვრით, სადაც $\alpha_j \in (0, 2\pi)$ (უკუქცევის წერტილები არ განიხილება).პირველ რიგში მტკიცდება ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობა გრინის ფორმულაზე დაყრდნობით. შემდეგ ხდება მოცემული ამოცანის შესწავლა ლოკალიზაციის მეთოდით და დაიყვანება მსგავს ამოცანებზე ბრტყელ კუთხეში თითოეული კუთხოვანი წერტილის მახლობლობაში (მოდელური ამოცანები).

მოდელური ამოცანის შესწავლა ხდება პოტენციალთა მეთოდით. შედეგად სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანება სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებაზე,რომელიც წარმოადგენს მელინის კონვოლუციის განტოლებას (განტოლებას უძრავი სინგულარობით). ხდება მიღებული განტოლების ამოხსნადობის სრული გამოკვლევა, რაც გვაძლევს საშუალებას, გავაკეთოთ დასკვნები საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობის და ამოხსნის თვისებების შესახებ.

მსგავსი შერეული ტიპის ამოცანა გამოკვლეულია სხვა მეთოდით მხოლოდ რაციონალური კუთხეებისათვის სტატიებში [ENS13a] და [ENS13b], რომლებიც მიღებულია დასაბეჭდად ჟურნალში Operators and Matrices. რაც შეეხება დირიხლეს და ნეიმანის ამოცანებს, ისინი გამოკვლეულია აგრეთვე მხოლოდ რაციონალური კუთხეებისათვის ამ ავტორების და სხვათა სტატიებში (იხ.მიმოხილვა სტატიებში [ENS13a, ENS13b]).

Summary

The purpose of the present research is to investigate the mixed Dirichlet-Neumann boundary value problems for the Helmholtz equation in a 2D domain $\Omega \subset \mathbb{R}$ with finite number of non-cuspidal angular points on the boundary. Using the localization the problem was reduced to model problems in plane angles of magnitude $\alpha_1, \dots \alpha_m$ of magnitude $\alpha_j \in [0, 2\pi]$, $j = 1, \dots, m$.

In the present paper we apply the potential method and reduce the model mixed BVP (with Dirichlet-Neumann conditions on the boundary) to an equivalent boundary integral equation (BIE) of Mellin convolution type. Applying recent results on Mellin convolution equations with meromorphic kernels in Bessel potential and Sobolev-Slobodeckij (Besov) spaces obtained by V. Didenko and R. Duduchava, criteria of the unique solvability (the Fredholm criteria) of the above mentioned mixed BVP in classical finite energy space $\mathbb{H}^1(\partial\Omega_\alpha) = \mathbb{W}^1(\partial\Omega_\alpha)$ and also in non-classical Bessel potential spaces $\mathbb{H}^1_p(\partial\Omega_\alpha)$ are obtained for $1 < p < \infty$.

Similar mixed type problems were investigated with different methods only for rational angles in the papers [ENS13a] and [ENS13b], which are eccepted for publication it the journal Operators and Matrices. Concerning the Dirichet and Neumann problems they are olso investigated with different methods only for rational angles by these authors and others (cf. survey in papers [ENS13a, ENS13b]).

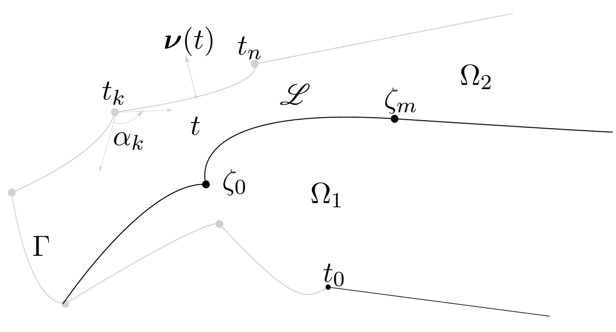
შესავალი

მათემატიკური ფიზიკის მრავალი ამოცანა, მაგალითად, ბზარების ამოცანები დრეკად გარემოში, ელექტრომაგნიტური ტალღების გაბნევა ზედაპირების მიერ და სხვა, ყალიბდება სასაზღვრო ამოცანების სახით ელიფსური კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ბრტყელ არეებში კუთხოვანი საზღვრით. ერთერთ ბოლო ნაშრომში [BDKT13] ასეთი სასაზღვრო ამოცანები ლოკალიზაციის მეთოდით დაყვანილია ეკვივალენტურ მოდელურ ამოცანებზე ბრტყელ კუთხოვან არეში Ω_{α_j} რომლსაც საზღვარზე გააჩნია კუთხეები $\alpha_j \in [0, 2\pi]$, $j = 1, \ldots, m$ (იხ. ნახ. 1). ამის შემდეგ, პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით მოდელური ამოცანები დაიყვანება შემდეგი სახის მელინის კონვოლუციის განტოლებებზე

$$\mathrm{A}\varphi(t) := c_0\varphi(t) + \frac{c_1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)\,dt}{\tau - t} + \int_0^\infty \mathscr{K}\left(\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{0.1}$$

მიღებული სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოკვლევა იყო შეუძლებელი, რადგან არ არსებობდა (0.1) ტიპის მელინის კონვოლუციის განტოლებების კვლევის შედეგები ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში შემდეგი დასმით $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+)$, $f \in \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$.

ბოლო წლებში დიდ ინტერესს იწვევს შემდეგი ამოცანის გამოკვლევა: ვეძებოთ Ω_1 და Ω_2 არეში განმარტებული $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^\top$ ვექტორ-ფუნქცია



ნახ. 1

რომელიც წარმოადგენს "ანიზოტროპული" ჰელმჰოლცის განტოლების ამონახსნს

$$
\begin{cases}
\operatorname{div} \mathscr{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0 \qquad \Omega_1\text{არეში},\\[2ex]
\operatorname{div} \mathscr{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0 \qquad \Omega_2\text{არეში},\\[2ex]
[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ = h \quad \text{ან} \quad u^+ = g \quad \Gamma := \partial(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})\text{არეზე},\\[2ex]
u^-(t) = u^+(t), \qquad [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^-(t) = [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+(t) \qquad \mathscr{L} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2\text{არეზე},
\end{cases} \tag{0.2}
$$

სადაც $\mathscr{E}_1$ არის უარყოფითად განსაზღვრული 3×3 მატრიცი, $\mathscr{E}_2$ არის დადებითად განსაზღვრული 3×3 მატრიცი, $k_j, \quad j = 1, 2$ არიან კომპლექსური რიცხვები,$\Gamma = \partial(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ არის $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ გაერთიანებული არის საზღვარი, ხოლო $\mathscr{L} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ არის არეების საერთო საზღვარი (ინტერფეისი), $\boldsymbol{\nu}(t)$ წარმოადგენს ერთეულოვან ნორმალს საზღვრის მიმართ $t \in \Gamma$ წერტილში.

თუ $\mathscr{E}_j = \text{const} = c_j I$, სადაც I არის სამგანზომილებიანი ერთეულოვანი მატრიცი, მაშინ

$$\operatorname{div} \mathscr{E}_j \operatorname{grad} u(x) + k_j^2 u(x) = c_j \Delta\, u(x) + k_j^2 u(x) \qquad \Omega_j,$$

და მივიღებთ "იზოტროპიულ" ჰელმჰოლცის განტოლებას. მაგრამ, თუ $\pm\mathscr{E}_j \neq \text{const}$ არის დადებითად განსაზღვრული მატრიცი, მაშინ არსებობს კვარდატული ფესვები $\mathscr{E}_j^{1/2}$, $\left(\mathscr{E}_j^{1/2}\right)^2 = \pm\mathscr{E}_j$ და ფუნქცია $v(x) := u\left(\mathscr{E}_j^{1/2} x\right)$ არის ჰელმჰოლცის განტოლებათა სისტემის ამონახსნი

$$\Delta\, v(x) - (-1)^j k_j^2 v(x) = 0 \quad \Omega_j^0\text{არეში}.$$

A. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet, Jr, X. Claeys, M. Dauge და ზოგიერთი სხვა ავტორის (იხ. [BCC12a, BCC12b] და იქ ციტირებული ლიტერატურა) ნაშრომებში დადგენილია (0.2) ტიპის სასაზღვრო ამოცანების სპექტრალური თვისებები. განხილულია შემთხვევები, როდესაც $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ არიან სკალარული, მაგრამ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციები და სასაზღვრო პირობები ნულოვანია. მიღებული პირობები საკმარისია და მათ მისაღებად გამოყენებული იქნა ლაქს-მილგრამის ლემის მოდიფიკაცია T-კოერციტიული ოპერატორებისათვის.

გამოკვლევის მიზანია ვიპოვოთ სასაზღვრო ამოცანის (0.2) ამონახსნის არსებობის კრიტერიუმი. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი.

პირველ რიგში შევისწავლოთ სასაზღვრო ამოცანის (0.2) ამონახსნის ერთადერთობა სობოლევის სივრცეში $\mathbb{H}^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. შემდეგ გამოვიყენოთ ლოკალიზაცია და (0.2) ამოცანის გამოკვლევა დავიყვანოთ 6 მოდელურ შემთხვევაზე.

ვთქვათ, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ აღნიშნავს ყველა სწრაფად ქრობად ფუნქციათა შვარცის სივრცეს და $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ აღნიშნავს $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$-ის შეუღლებულ განზოგადებული ფუნქციების სივრცეს $\mathbb{R}^n$-ზე. ბესელის პოტენციალთა სივრცე $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, არის ისეთი $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციების სივრცე, რომლისთვისაც შემდეგი ნორმა

$$\|\varphi|\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)\| = \|\mathscr{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}\varphi|\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \tag{0.3}$$

სასრულია. $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{x \mapsto \xi}$ აღნიშნავს ფურიეს გარდაქმნას $\mathbb{R}^n$-ში.

$\mathbb{R}^n$-ზე მოცემული რაიმე $\mathscr{D}$ არისთვის $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathscr{D})$ აღნიშნავს $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$-ის ჩაკეტილ ქვესივრცეს, რომლის ელემენტებსაც საყრდენი აქვთ $\overline{\mathscr{D}}$ არეში.

$\mathbb{H}^s_p(\mathscr{D})$ აღნიშნავს $\mathscr{D}$-ზე განმარტებული ისეთი ფუნქციების (დისტრიბუციების, თუ $s < 0$) სივრცეს, რომელთაც გააჩნიათ გაგრძელება მთელ $\mathbb{R}^n$-ზე და ეს გაგრძელება ეკუთვნის $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$ სივრცეს.

$\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathscr{D})$ წარმოადგენს $\mathbb{H}^s_p(\mathscr{D})$ სივრცის ტოპოლოგიურ ქვესივრცეს ინდუცირებული ნორმით, ხოლო $\mathbb{H}^s_p(\mathscr{D})$ სივრცე შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ფაქტორ-სივრცე $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})/\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\mathscr{D}})$ შესაბამისი ნორმით

$$\|\varphi|\mathbb{H}^s_p(\mathscr{D})\| := \inf_{\ell\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})} \|\ell\varphi\|\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})\|,$$

სადაც ინფიმუმი აიღება ყველა გაგრძელების მიმართ $\ell\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})$.

$\mathbb{W}^m_p(\mathbb{R}^n)$, როცა $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$, აღნიშნავს სობოლევის სივრცეს, რომელიც შედგება $\varphi \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციებისაგან, რომელთაც გააჩნიათ წარმოებულები $\partial^\alpha\varphi$ რიგამდე $|\alpha| \leqslant m$ და ეს წარმოებულები ეკუთვნიან იმავე სივრცეს $\partial^\alpha\varphi \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$. ნორმა ამ სივრცეში განიმარტება ტოლობით

$$\|f \,|\, \mathbb{W}^m_p(\mathbb{R}^n)\| := \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f \,|\, \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)\|^p\right)^{1/p}$$

თუ $1 \leqslant p < \infty$, ხოლო $p = \infty$ შემდეგი ტოლობით

$$\|f \,|\, \mathbb{W}^m_\infty(\mathbb{R}^n)\| := \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|\,.$$

თუ $s > 0$ მაშინ $[s]$ და $\{s\}$ $\{s\}$ აღნიშვნავენ შესაბამისად s რიცხვის მთელ და წილად ნაწილებს

$$s = [s] + \{s\}\,, \qquad [s] \in \mathbb{N}_0\,, \quad 0 \leqslant \{s\} < 1\,.$$

$\mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^n)$, როცა $1 \leqslant p < \infty$, $s > 0$, აღნიშნავს სობოლევის სივრცის $\mathbb{W}^{[s]}_p(\mathbb{R}^n)$ ქვესივრცეს და აღნიშნავს სლობოდევსკის სივრცეს ნორმით

$$\|f\,|\,\mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^n)\| \;:=\; \|f\,|\,\mathbb{W}^{[s]}_p(\mathbb{R}^n)\| + \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+\{s\}p}}\,dx\,dy\right)^{1/p}\,.$$

ხოლო $\mathbb{W}^s_\infty(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში ნორმა განიმარტება ტოლობით

$$\begin{aligned} \|f\,|\,\mathbb{W}^s_\infty(\mathbb{R}^n)\| \;&=\; \|f\,|\,\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^n)\| \;:=\; \|f\,|\,C^{[s]}(\mathbb{R}^n)\| \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x,h\in\mathbb{R}^n,\; h\neq 0} \frac{|(\partial^\alpha f)(x+h) - (\partial^\alpha f)(x)|}{|h|^{\{s\}}}\,. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{W}^s_\infty(\mathbb{R}^n)$ ემთხვევა ჰელდერის ფუნქციათა სივრცეს.

1. ლოკალიზაცია და მოდელური სასაზღვრო ამოცანები

ჩვენ შევისწავლით სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის $u \in H^1(\Omega)$ არსებობას და ერთადერთობას "იზოტროპული" ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathscr{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0 \quad \Omega_1 \quad \text{არეში}, \\ \operatorname{div} \mathscr{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0 \quad \Omega_2 \quad \text{არეში}, \\ a_j[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_j u^+ = h_j \quad \Gamma_j \quad \text{არეზე}, \quad j = 0, \ldots, n, \\ c_{j,k}^1[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^{(1)} - d_{j,k}^1 u^{(1)} = c_{j,k}^2[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^{(2)} - d_{j,k}^2 u^{(2)} \quad \mathscr{L}_j \quad \text{წირზე}, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{1.1}$$

სადაც ∂_{ν} არის ნორმალური წარმოებული $\partial_{\nu} u := \boldsymbol{\nu}_1 \partial_1 u + \boldsymbol{\nu}_2 \partial_2 u$. $\mathscr{E}_1$ არის უარყოფითად განსაზღვრული 3×3 მატრიცი, $\mathscr{E}_2$ არის დადებითად განსაზღვრული 3×3 მატრიცი, $k_j, \quad j = 1, 2$ არიან კომპლექსური რიცხვები, $\Gamma = \partial(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}) = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ არის $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ არის საზღვარი, $\mathscr{L} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{L}_j$ არის არეების საერთო საზღვარი (ინტერფეისი), $\boldsymbol{\nu}(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t))^\top$ წარმოადგენს ერთეულოვან ნორმალს საზღვრის მიმართ $t \in \Gamma$ წერტილში.

(1.1) სასაზღვრო განტოლებისათვის გამოვიყენოთ კვაზი-ლოკალიზაცია. დეტალებისათვის კვაზი-ლოკალიზაციის ტექნიკის შესახებ შეიძლება მიმართოთ მონოგრაფიას T. Buchukuri, O. Chkadua, R. Duduchava, D. Natroshvili [BCDN12] და სტატიებს R. Duduchava [Du84a], L. Castro, R. Duduchava & F. Speck [CDS03].

ამისათვის საჭიროა რამოდენიმე საფეხურის გამოყენება:

I. ჩვენ განვიხილავთ კვაზი-ლოკალურ წარმომადგენელს (1.1) სასაზღვრო განტოლებისათვის ყველა $t \in \overline{\Omega} \cup \{\infty\}$ წერტილში უსასრულობის ჩათვლით. ლოკალური წარმოდგენა დაკავშირებულია კოეფიციენტების გაყინვასთან და წირების გასწორებასთან;

II. თუ ლოკალური წარმომადგენელი არის ფრედჰოლმის ყველა $t \in \overline{\Omega} \cup \{\infty\}$ წერტილში, მაშინ ლოკალიზაციის ძირითადი თეორემის თანახმად (1.1) სასაზღვრო განტოლება არის ფრედჰომლის.

III. უნდა ვაჩვენოთ, რომ (1.1) განტოლების ინდექსი არის 0. რადგანაც ვიცით, რომ ერთგვაროვან სასაზღვრო განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, დავასკვნით, რომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ყველა კორექტულად შერჩეული მონაცემებისათვის.

IV. ამონახსნის წარმოდგენა ხდება მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების საშუალებით, რომელთა სიმკვრივეებიდან ერთი ცნობილია (განისაზღვრება ამოცანის მონაცემებიდან), ხოლო მეორე წარმოადგენს განსაზღვრული ფსევდოდიფერენციალური განტოლების ამონახსნს. ასეთ მიდგომას ეწოდება პოტენციალთა მეთოდი.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაციის შედეგად მივიღებთ შემდეგ 6 მოდელურ ამოცანას:

I მოდელური ამოცანა. (1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია შიდა $t \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ წერტილში წარმოადგენს მოდელურ ამოცანას მთელ $\mathbb{R}^2$-ში.

$$\operatorname{div} \mathscr{E}_j \operatorname{grad} u + k_j^2 u = 0 \qquad \mathbb{R}^2 - \text{ში}, \tag{1.2}$$

სადაც ინდექსი $j = 1, 2$ ფიქსირებულია. კარგად არის ცნობილი, რომ მიღებული დიფერენციალური ოპერატორი $\mathbb{R}^2$-ზე შებრუნებადია და მისი შებრუნებული ოპერატორის შვარცის ბირთვი წარმოადგენს ფუნდამენტურ ამონახსნს.

II მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია საზღვრის წერტილში $t \in \Gamma$, რომელიც განსხვავებულია კვანძებისაგან $t \neq t_1, \dots, t_n$ გვაძლევს მოდელურ ამოცანას ნახევარსიბრტყეში $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathscr{E}_j \operatorname{grad} u + k_j^2 u = 0 & \mathbb{R}^2_+ - \text{ში}, \\ a[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b u^+ = h & \mathbb{R} := \partial \mathbb{R}^2_+ - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.3}$$

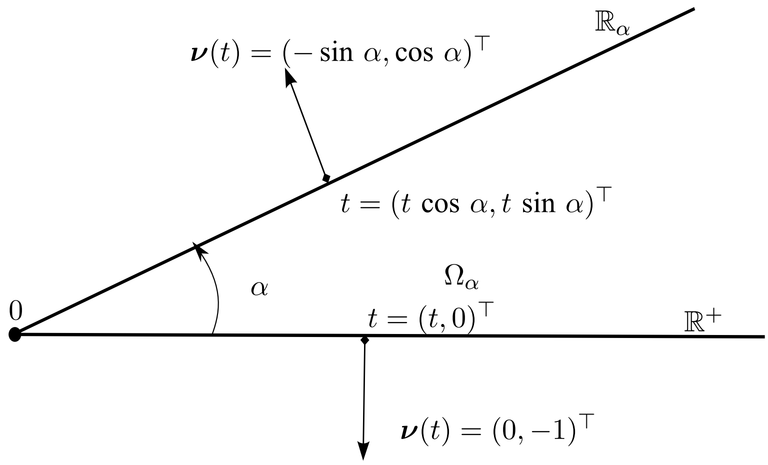
სადაც ინდექსი $j = 1, 2$ ფიქსირებულია, a და b არიან ცნობილი კონსტანტები და h ცნობილი ფუნქციაა. თუ $a \neq 0$, მაშინ $h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R})$. ცნობილია, რომ გარკვეული შეზღუდვებით a და b კოეფიციენტებზე ამოცანას (1.3) გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ სივრცეში (ეს არის ნახევარსიბრტყის ამოცანა, იხ. [Es81]).

III მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია საზღვრის იმ კვანძში $t = t_k \in \Gamma$,რომელიც არ ეკუთვნის ორი არის გამყოფ საზღვარს $\mathscr{L}$, წარმოადგენს მოდელურ ამოცანას კუთხოვან Ω_α არეში (იხ. ნახ. 2).

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \quad \Omega_\alpha \quad \text{არეში}, \\ a_\ell [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_\ell u^+ = h \quad R_\ell \quad \text{ღერძზე}, \qquad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.4}$$

აქ Ω_α წარმოადგენს არეს ორ სხივს $R_1 := \mathbb{R}^+$ და $R_2 := \mathbb{R}_\alpha$ შორის, რომლებიც გამოდიან სათავიდან. მათგან ერთერთი ემთხვევა დადებით ნახევარღერძს $R_1 := \mathbb{R}^+$, ხოლო მეორე $R_2 := \mathbb{R}_\alpha$ მობრუნებულია მისდამი α კუთხით.

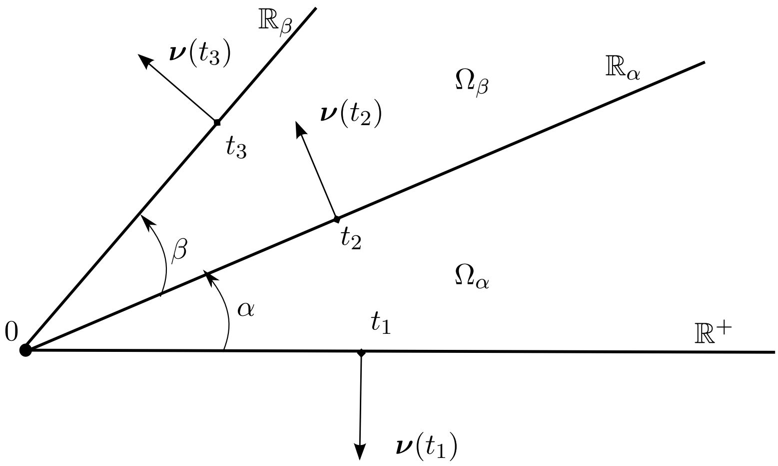


ნახ. 2

IV მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია საზღვრის იმ წერტილში, სადაც Γ საზღვარი ხვდება არეების გამყოფ $\mathscr{L}$ წირს, გვაძლევს მოდელურ ამოცანას არეში 2 კუთხით. (იხ. ნახ.3)

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathscr{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0 \quad \Omega_\beta \text{არეში}, \\ \operatorname{div}\mathscr{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0 \quad \Omega_\alpha \text{არეში}, \\ a_1[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_1 u^+ = h \quad \mathbb{R}^+ \text{ღერძზე}, \\ a_2[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_2 u^+ = h \quad \mathbb{R}_\beta \text{ღერძზე}, \\ c_\ell^1[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - d_\ell^1 u^+ = c_\ell^2[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^- - d_\ell^2 u^- \quad \text{on} \quad \mathbb{R}_\alpha, \quad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.5}$$



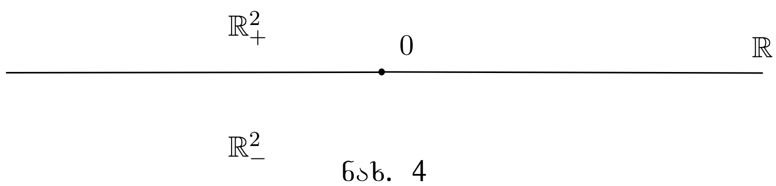
ნახ. 3

V მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია არეების გამყოფი წირის იმ $\mathscr{L} \ni t \neq \zeta_1, \dots, \zeta_m$ წერტილში, რომელიც არ ემთხვევა კვანძს, გვაძლევს მოდელურ ამოცანას მთელ სიბრტყე-ში, რომელიც გაყოფილია ნამდვილი ღერძით $\mathbb{R}$ (იხ. ნახ. 4)

$$
\begin{cases}
\operatorname{div} \mathscr{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\
\operatorname{div} \mathscr{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2_- := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-, \\
c^1_\ell [\partial_2 u]^+ - d^1_\ell u^+ = c^2_\ell [\partial_2 u]^- - d^2_\ell u^- \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \quad \ell = 1, 2.
\end{cases} \tag{1.6}
$$

რადგან $\partial_{\boldsymbol{\nu}} = \partial_2$. ეს ამოცანა არის მარტივად გამოსაკვლევი.

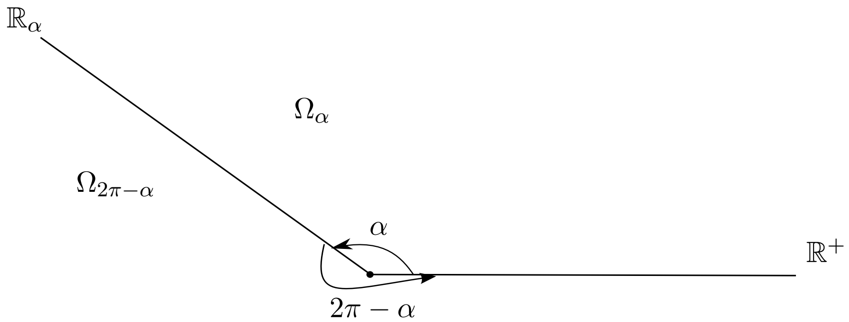


ნახ. 4

VI მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია არეების გამყოფი წირის $\mathscr{L}$ კვანძებში $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, გვაძლევს მოდელლურ ამოცანას Ω_α კუთხოვან არეში და მის პირდაპირ დამატებაში $\Omega_{2\pi-\alpha} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\alpha}$, რაც წარმოადგენს მთელ სიბრტყეს, გაყოფილს Γ_α კუთხის საზღვრით (იხ. ნახ. 5):

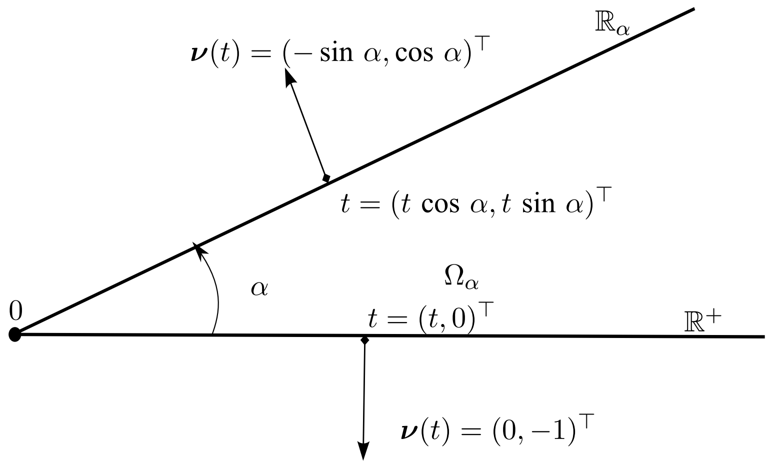
$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathscr{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\alpha, \\ \operatorname{div} \mathscr{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_{2\pi-\alpha}, \\ c_\ell^1 [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - d_\ell^1 u^+ = c_\ell^2 [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^- - d_\ell^2 u^- \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_\alpha \quad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.7}$$



ნახ. 5

2. პოტენციალის ტიპის ოპერატორები და სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებები

ვთქვათ, Ω_α წარმოადგენს არეს ორ სხივს $R_1 := \mathbb{R}^+$ და $R_2 := \mathbb{R}_\alpha$ შორის, რომლებიც გამოდიან სათავიდან. მათგან ერთერთი ემთხვევა დადებით ნახევარღერძს $R_1 := \mathbb{R}^+$, ხოლო მეორე $R_2 := \mathbb{R}_\alpha$ მობრუნებულია მისდამი α კუთხით (იხ. ნახ. 1):



ნახ. 1

$$\partial\Omega_\alpha = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_\alpha, \qquad \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \quad \mathbb{R}_\alpha := \{te^{i\alpha} = (t\cos\alpha, t\sin\alpha) \; : \; t \in \mathbb{R}^+\}. \tag{2.1}$$

ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორი $\boldsymbol{\nu}(t)$ საზღვარზე $\partial\Omega_\alpha$ განმარტებულია შემდგენაი-რად:

$$\boldsymbol{\nu}(x) = \begin{cases} (0, -1)^\top & x \in \mathbb{R}^+ - \text{თვის} \\ (-\sin\alpha, \cos\alpha) & x \in \mathbb{R}_\alpha - \text{თვის.} \end{cases} \tag{2.2}$$

განვიხილოთ შერეული სასაზღვრო ამოცანა

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, & x \in \Omega_\alpha, \\ u^+(t) = g(t), & t \in \mathbb{R}^+, \quad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}^+) \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(t) = h(t), & t \in \mathbb{R}_\alpha, \quad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha) \end{cases} \tag{2.3}$$

სადაც ნორმალური წარმოებული $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \begin{cases} -\partial_t & \text{როცა} \quad t = (t, 0) \in \mathbb{R}^+ \\ -\sin\alpha\,\partial_{t_1} + \cos\alpha\,\partial_{t_2} & \text{როცა} \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_\alpha. \end{cases} \tag{2.4}$$

(2.3) შერეული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ორივე დასმით: კლასიკური (სასრული ენერგია)

$$\begin{aligned} & g \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}^+), \qquad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha), \qquad u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha) = \mathbb{W}^1(\Omega_\alpha), \\ & u(x) = \mathscr{O}(1) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty \end{aligned} \tag{2.5}$$

და ასევე არაკლასიკური სუსტი დასმით

$$\begin{aligned} & g \in \mathbb{W}^{1/p}_p(\mathbb{R}^+), \qquad h \in \mathbb{W}^{-1/p}_p(\mathbb{R}_\alpha), \qquad u \in \mathbb{H}^1_p(\Omega_\alpha) = \mathbb{W}^1_p(\Omega_\alpha), \\ & u(x) = \mathscr{O}(1) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned} \tag{2.6}$$

თეორემა 2.1 ვთქვათ, $1 < p < \infty$. (2.3) შერეულ სასაზღვრო ამოცანას (2.5) შეზღუდვის პირობებში აქვს ერთადერთი ამონახსნი $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$, რომელიც წარმოიდგინება (2.23) ფორმულით, სადაც უცნობი ფუნქციები ψ და φ_0 არიან (2.36a) სისტემის ერთადერთი ამონახსნები $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\Omega_\alpha)$ სივრცეში და $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ აღდგება φ_0 ფუნქციის საშუალე-ბით და ფორმულით (2.36b).

თუ $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ შერეული სასაზღვრო ამოცანას (2.3) შეზღუდვის (2.6) პირობებში გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in \mathbb{H}^1_p(\Omega_\alpha)$ შემდეგი პირობით: $\alpha_0 := \alpha \in (0, \pi)$ ან $\alpha_0 := 2\pi - \alpha \in (0, \pi)$ (ე.ი. თუ $\alpha \in (\pi, 2\pi)$) არ წარმოადგენს შემდეგი ტრანსცენდენტული განტოლებების ამონახსნს

$$\sin\left[\frac{2\pi}{p} + \left(\frac{1}{p} - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha_0\right] = 0, \qquad \sin\left(\frac{1}{p} - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha_0 = 0 \quad if \quad \alpha_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \tag{2.7}$$

და

$$\sin^4\frac{\pi}{p} - \left\{\cos\frac{\pi}{p}\cos\left[\alpha_0\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi - \alpha_0}{p}\right] + \cos\left[\alpha_0\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha_0}{p}\right]\right\}^2 = 0, \tag{2.8}$$

$$\sin^4\frac{\pi}{p} - \left\{\sin\frac{\pi}{p}\cos\left[\alpha_0\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi - \alpha_0}{p}\right] + \cos\left[\alpha_0\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha_0}{p}\right]\right\}^2 = 0 \qquad if \quad \alpha_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.9}$$

თუ ამონახსნი არსებობს, ის წარმოდგენილია ფორმულით (2.23), სადაც უცნობი ფუნქციები ψ და φ_0 არიან (2.36a) სისტემის ერთადერთი ამონახსნები $\widetilde{\mathbb{W}}^{-1/p}_p(\Omega_\alpha)$ სივრცეში და $\varphi \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ აღდგება φ_0 ფუნქციის საშუალებით და ფორმულით (2.36b).

თეორემის დამტკიცება მოყვანილი იქნება ქვემო პარაგრაფში.ახლა კი დავიწყოთ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის გამოკვლევით.

თეორემა 2.2 (2.3) შერეულ სასაზღვრო ამოცანას კომპლექსური k პარამეტრისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$ სივრცეში, თუ ამონახსნს გააჩნია (2.5) ყოფაქცევა უსასრულობაში.

დამტკიცება: ერთადერთობის დასამტკიცებლად გამოიყენება გრინის ფორმულა. ვთქვათ, R არის საკმარისად დიდი დადებითი რიცხვი და $B(R)$ იყოს R რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით 0-ში. შემოვიღოთ სიმრავლე $\Omega_R := \Omega_\alpha \cap B(R)$. ვთქვათ u არის ერთგვაროვანი (2.3) შერეული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი შერეული სასაზღვრო პირობებით

$$\begin{cases} u^+ = g = 0 \quad \mathbb{R}^+ \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+ = h = 0 \quad \mathbb{R}_\alpha. \end{cases}$$

მაშინ u ამონახსნისთვის და მისი $\bar{u}$ კომპლექსური შეუღლებულისთვის Ω_R არეში ადგილი აქვს გრინის იგივეობას.

$$\int_{\Omega_R} \Big[|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \Big] dx = \int_{\partial\Omega_R} (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)\, \bar{u}\, d\sigma = \int_{B(R)\cap\partial\Omega_\alpha} (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)\, \bar{u}\, d\sigma + \int_{\partial B(R)\cap\Omega_\alpha} (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)\, \bar{u}\, d\sigma, \tag{2.10}$$

რადგან ფუნქციის ან მისი ნორმალური წარმოებულის კვალი ხდება 0-ის ტოლი R_1 და R_2 ნახევარღერძებზე, ამიტომ

$$\int_{B(R)\cap\partial\Omega_\alpha} (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)\, \bar{u}\, d\sigma = 0.$$

კარგად არის ცნობილი, რომ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი $u(x)$ წარმოიდგინება პოტენციალთა სხვაობის სახით (იხ. ქვემოთ ფორმულა (2.20)). მეორეს მხრივ, კომპლექსური პარამეტრისათვის პოტენციალთა ბირთვები ქრებიან უსასრულობაში ექსპონენციალურად (იხ. ქვემოთ ფორმულა (2.18)). ამის შედეგად, (2.5) პირობის მაგივრად გვაქვს ამონახსნის ქრობადობის უფრო ძლიერი პირობა

$$u(x) = \mathscr{O}\left(e^{-\varepsilon|x|}\right) \qquad \text{როდესაც} \quad |x| \to \infty \tag{2.11}$$

რაიმე $\varepsilon > 0$-სთვის. შედეგად, (2.10) ფორმულაში ზღვარზე გადასვლით $R \to \infty$ მივიღებთ ტოლობას

$$\int_{\Omega_\alpha} \Big[|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \Big] dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Omega_R} \Big[|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \Big] dx = 0. \tag{2.12}$$

რადგან k კომპლექსური რიცხვია, (2.12) ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\int_{\Omega} \Big[|\nabla u|^2 + \Big((\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} k)^2 \Big) |u|^2 \Big] dx = 0;$$

$$-2(\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) \int_{\Omega} |u|^2 \, dx = 0 \, .$$

ამგვარად, $\operatorname{Im} k \neq 0$ პირობისთვის და უკანასკნელი ორი იგივეობიდან მივიღებთ, რომ $u = 0$ მთელ Ω_α არეში. ∎

პოტენციალთა მეთოდის გამოსაყენებლად განვიხილოთ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალები

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}\varphi(x) &:= \int_{\partial\Omega_\alpha} \mathscr{H}_k(x-\tau)\varphi(\tau)d\sigma, \\ \boldsymbol{W}\varphi(x) &:= \int_{\partial\Omega_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathscr{H}_k(x-\tau)\varphi(\tau)d\sigma, \qquad x \in \Omega_\alpha, \end{aligned} \tag{2.13}$$

სადაც 0 რიგის ჰენკელის ფუნქცია $\mathscr{H}_k(x)$

$$\mathscr{H}_k(x) := \frac{1}{4} H_0^{(1)}(k|x|) \tag{2.14}$$

წარმოადგენს ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნს

$$\Delta \mathscr{H}_k(x) - k^2 \mathscr{H}_k(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.15}$$

მეორეს მხრივ, ფუნქცია

$$\mathscr{K}_\Delta(x) := \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \tag{2.16}$$

წარმოადგენს ორი ცვლადის ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნს

$$\Delta \mathscr{K}_\Delta(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \tag{2.17}$$

და სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური ტოლობები

$$H_0^{(1)}(k|x|) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \ln |x| + \mathscr{O}(1) & \text{როცა} \quad |x| \to 0, \\ \mathscr{O}(e^{-|\operatorname{Im} k||x|}), & \text{როცა} \quad |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{2.18}$$

(2.18) ასიმპტოტური ტოლობის თანახმად შეგვიძლია ფუნდამენტური ამონახსნი დავშალოთ შემდეგი სახით

$$\mathscr{H}_k(x) = \mathscr{K}_\Delta(x) + \mathscr{H}_k^0(x), \qquad \mathscr{H}_k^0(x) = \mathscr{O}(|x|) \quad \text{როცა} \quad |x| \to 0,$$

სადაც ფუნქციებს $\mathscr{H}_k{}^0(x-y)$, $\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{H}_k{}^0(x-y)$ და $\partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\mathscr{H}_k{}^0(x-y)$ გააჩნიათ სუსტი სინგულარობა და შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორები

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\psi}(x) &:= \textstyle\int_{\partial\Omega_\alpha} \mathscr{H}_k^0(x-y)\boldsymbol{\psi}(y)d\sigma, \\ \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\psi}(x) &:= \textstyle\int_{\partial\Omega_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{H}_k^0(x-y)\boldsymbol{\psi}(y)d\sigma, \\ \boldsymbol{K}_1^*\varphi(x) &:= \textstyle\int_{\partial\Omega_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\mathscr{H}_k^0(x-y)\varphi(y)d\sigma, \end{aligned} \tag{2.19}$$

არიან კომპაქტურები ლებეგის $\mathbb{L}_p$ სივრცეში.

(2.3) შერეული სასაზღვრო ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი წარმოიდგინება ორმაგი და მარტივი ფენის პოტენციალების სხვაობით

$$u(x) = \boldsymbol{W}u^+(x) - \boldsymbol{V}[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+(x) = \int_{\partial\Omega_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)} \mathscr{H}_k(x-\tau)u^+(\tau)d\sigma$$
$$- \int_{\partial\Omega_\alpha} \mathscr{H}_k(x-\tau)[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+(\tau)d\sigma, \quad x \in \Omega_\alpha \tag{2.20}$$

(იხ. [DNS95, Du01]) სადაც სიმკვრივეები წარმოადგენენ u ამონახსნის დირიხლეს u^+ და ნეიმანის $[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+$ კვალებს საზღვარზე.

როგორც ვიცით, პლემელის ფორმულას აქვს სახე

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{W}\varphi)^\pm(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \boldsymbol{W}_0\varphi(t), \qquad (\partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\boldsymbol{V}\psi)^\pm)(t) = \mp\frac{1}{2}\psi(t) + \boldsymbol{W}_0^*\psi(t), \\
\boldsymbol{W}_0\varphi(t) := \int_{\partial\Omega_\alpha} (\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{H}_k)(t-y)\varphi(y)d\sigma, \\
\boldsymbol{W}_0^*\boldsymbol{\psi}(t) := \int_{\partial\Omega_\alpha} (\partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\mathscr{H}_k)(t-y)\boldsymbol{\psi}(y)d\sigma, \qquad t \in \partial\Omega_\alpha, \\
(\partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\psi})^\pm(t) = \boldsymbol{V}_{+1}\boldsymbol{\psi}(t) := \int_{\partial\Omega_\alpha} (\partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{H}_k)(t-y)\boldsymbol{\psi}(y)d\sigma, \\
(\boldsymbol{V}\varphi)^\pm(t) = \boldsymbol{V}_{-1}\varphi(t) := \int_{\partial\Omega_\alpha} \mathscr{H}_k(t-y)\varphi(y)d\sigma, \qquad t \in \partial\Omega_\alpha,
\end{gathered} \tag{2.21}$$

სადაც $\boldsymbol{V}_{-1}$, $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_0^*$ და $\boldsymbol{V}_{+1}$ არიან ფსევდო-დიფერენციალური ოპერატორები $\partial\Omega_\alpha$ საზღვარზე, შესაბამისად -1, 0, 0 და $+1$, რიგის.

ვთქვათ, $g_0 \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega_\alpha)$ და $h_0 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\partial\Omega_\alpha)$ არიან $g \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ და $h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$ სასაზღვრო პირობების რაიმე ფიქსირებული გაგრძელებები, რომლებიც თავიდან განსაზღვრული იყვნენ $\partial\Omega_\alpha = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^\alpha$ საზღვრის ნაწილზე. შევნიშნოთ, რომ ასეთნაირად ორ გაგრძელებას შორის სხვაობა მოთავსებული იქნება შესაბამისად $\widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$ და $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ სივრცეებში, უნდა ვიპოვოთ ორი უცნობი ფუნქცია, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$ და $\psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$, რომელთათვისაც (2.3) სასაზღვრო პირობები შესრულდება მთელ საზღვარზე. როგორც ვიცით, $\widetilde{\mathbb{H}}^s(\mathbb{R}^+)$ და $\widetilde{\mathbb{H}}^s(\mathbb{R}_\alpha)$ წარმოადგენენ $\mathbb{H}^s(\partial\Omega_\alpha)$ სივრცის ქვესივრცეებს, თუ ფუნქციები ქვესივრციდან გაგრძელებულია ნულით შესაბამისად $\mathbb{R}_\alpha$ და $\mathbb{R}^+$ ღერძებზე. მაშინ, თუ $u(x)$ არის (2.3) განტოლების ამონახსნი, სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{gathered}
u^+(t) = g_0(t) + \varphi(t) = \begin{cases} g(t) & \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ g_0(t) + \varphi(t) & \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_\alpha, \end{cases} \\
(\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(t) = h_0(t) + \psi(t) = \begin{cases} h_0(t) + \psi(t) & \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ h(t) & \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_\alpha. \end{cases}
\end{gathered} \tag{2.22}$$

თუ (2.3) განტოლებაში გამოვიყენებთ (2.22) სასაზღვრო მნიშვნელობებს და ჩავსვამთ (2.20) წარმოდგენის ფორმულაში, მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენის ფორმულას

$$u(x) = \boldsymbol{W}[g_0 + \varphi](x) - \boldsymbol{V}_{\mathbb{R}^+}[h_0 + \psi](x), \qquad x \in \Omega_\alpha. \tag{2.23}$$

(2.22) წარმოდგენაში მოცემული ნაცნობი და უცნობი ფუნქციები ეკუთვნიან შემდეგ სივრცეებს (იხ. (2.3))

$$g_0 \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega_\alpha), \quad h_0 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\partial\Omega_\alpha), \quad \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\mathbb{R}_\alpha), \quad \psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+). \tag{2.24}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.3) განტოლებიდან სასაზღვრო პირობებს (2.22) წარმოდგენაში და გავითვალისწინებთ (2.21) პლემელის ფორმულას, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} g_0(t) + \varphi(t) = u^+(t) = \dfrac{1}{2}(g_0(t) + \varphi(t)) + \boldsymbol{W}_0[g_0 + \varphi](t) - \boldsymbol{V}_{-1}[h_0 + \psi](t), \\ h_0(t) + \psi(t) = (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(t) = \boldsymbol{V}_{+1}[g_0 + \varphi](t) + \dfrac{1}{2}(h_0(t) + \psi(t)) - \boldsymbol{W}_0^*[h_0 + \psi](t), \end{cases}$$
$$t \in \partial\Omega_\alpha.$$

მიღებული სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi - \boldsymbol{W}_0\varphi + \boldsymbol{V}_{-1}\psi = G_0, \\ \dfrac{1}{2}\psi + \boldsymbol{W}_0^*\psi - \boldsymbol{V}_{+1}\varphi = H_0 \qquad \partial\Omega_\alpha \quad \text{საზღვარზე}, \end{cases} \tag{2.25}$$

$$G_0 := -\frac{1}{2}g_0 + \boldsymbol{W}_0 g_0 - \boldsymbol{V}_{-1}h_0 \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega_\alpha),$$
$$H_0 := -\frac{1}{2}h_0 + \boldsymbol{V}_{+1}g_0 - \boldsymbol{W}_0^* h_0 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\partial\Omega_\alpha),$$

შევნიშნოთ, რომ $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_\alpha$ და $\operatorname{supp}\psi \subset \mathbb{R}^+$, (2.25) სისტემაში პირველი განტოლება ჩვენ შევზღუდეთ $\mathbb{R}_\alpha$ ღერძზე, ხოლო მეორე განტოლება - $\mathbb{R}^+$ ღერძზე. ვთქვათ, r_+ და r_α არიან შესაბამისი შეზღუდვების ოპერატორები: $r_+\varphi = r_\alpha\psi = 0$. დამტკიცებულია,რომ შემდეგი შეზღუდვები არიან ნულის ტოლი (იხ. [BDKT13])

$$r_\alpha \boldsymbol{W}_0\varphi = r_+\boldsymbol{W}_0\psi = r_\alpha \boldsymbol{W}^*\varphi = r_+\boldsymbol{W}_0^*\psi = 0 \tag{2.26}$$

და თუ გამოვიყენებთ ამ შეზღუდვებს (2.25) სისტემაში, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi + r_\alpha \boldsymbol{V}_{-1}\psi = r_\alpha G_0 & \mathbb{R}_\alpha - \quad \text{ზე}, \\ \dfrac{1}{2}\psi - r_+ \boldsymbol{V}_{+1}\varphi = r_+ H_0 & \mathbb{R}^+ - \quad \text{ზე}. \end{cases} \tag{2.27}$$

რათა ავხსნათ რა აზრით გვესმის ჰიპერსინგულარული $\boldsymbol{V}_{+1}$ ოპერატორის მოქმედება f ფუნქციაზე, ჩავატაროთ შემდეგი მსჯელობა: რადგან $\mathscr{K}_\Delta(x)$ ბირთვი წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნს, რაც ნიშნავს, რომ

$$\Delta \mathscr{K}_\Delta(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.28}$$

(2.28) ტოლობის გამოყენებით, როცა $t = (t, 0) \in \mathbb{R}^+$, $y = (\tau \cos\,\alpha, \tau \sin\,\alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$ მივიღებთ (იხ. (2.4)):

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{K}_\Delta(t-y) &= \partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{K}_\Delta(x-y)\Big|_{x=(t,0)} = -\partial_{x_2}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{K}_\Delta(x-y)\Big|_{x=(t,0)} \\ &= \partial_{y_2}(-\sin\alpha\,\partial_{y_1} + \cos\alpha\,\partial_{y_2})\mathscr{K}_\Delta(x-y)\Big|_{x=(t,0)} \\ &= \left[\left\{-\sin\alpha\,\partial_{y_1}\partial_{y_2} + \cos\alpha\,\partial^2_{y_2}\right\}\mathscr{K}_\Delta(x-y)\right]_{x=(t,0)} \\ &= \left[\cos\alpha\ \Delta\mathscr{K}_\Delta(x-y) - \left\{\cos\alpha\,\partial^2_{y_1} + \sin\alpha\,\partial_{y_1}\partial_{y_2}\right\}\mathscr{K}_\Delta(x-y)\right]_{x=(t,0)} \\ &= \left[\cos\,\alpha\delta(x-y) - \partial_{y_1}\left\{\cos\,\alpha\,\partial_{y_1} + \sin\,\alpha\,\partial_{y_2}\right\}\mathscr{K}_\Delta(x-y)\right]_{x=(t,0)} \\ &= \cos\,\alpha\,\delta(0) - \partial_{\ell(y)}\partial_{y_1}\mathscr{K}_\Delta(t-y), \end{aligned} \tag{2.29}$$

მაშინ, როცა $t \in \mathbb{R}^+$ და $y \in \mathbb{R}^\alpha$, $\delta(t-y) = \delta(0)$; აქ

$$\partial_{\ell(y)} := \begin{cases} \cos\,\alpha\,\partial_{y_1} + \sin\,\alpha\,\partial_{y_2} & \text{სიმრავლეზე} \quad \mathbb{R}_\alpha, \\ \partial_{y_1} & \text{სიმრავლეზე} \quad \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2.30}$$

არის მხები წარმოებული $\partial\Omega_\alpha$ საზღვარზე. გამოვიყენოთ პარამეტრიზაცია

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2) = (t\cos\,\alpha, t\sin\,\alpha)^\top \in \mathbb{R}_\alpha, \quad y = (\tau\cos\,\alpha, \tau\sin\,\alpha)^\top \in \mathbb{R}_\alpha, \\ \theta = (\theta, 0) \in \mathbb{R}^+, \quad \text{სადაც} \quad t, \tau, \theta \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{2.31}$$

ცხადია, რომ

$$
\begin{aligned}
&\text{თუ} \quad \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\mathbb{R}_\alpha) \quad \text{და} \quad \varphi_+(t) := \varphi(t\cos\,\alpha, t\sin\,\alpha), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\
&\qquad\qquad \text{მაშინ} \quad \varphi_0 := \partial_t\varphi_+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+), \qquad \partial_t := \tfrac{d}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

რადგან $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ φ და φ_0 ქრებიან 0-ის მიდამოში. მაშინ გამოვიყენებთ რა (2.29) ტოლობას, (2.27) სისტემის მეორე განტოლებას გადავწერთ შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\psi(t) - r_+\boldsymbol{V}_{+1}\varphi(t) &= \frac{1}{2}\psi - \int_{\mathbb{R}_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathscr{K}_\Delta(t-y)\varphi(y)|dy| \\
&= \frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_\alpha} \partial_{\ell(y)}\partial_{y_1}\ln\sqrt{(t-y_1)^2+y_2^2}\,\varphi(y)|dy| \\
&= \frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_\alpha} \partial_{\ell(y)}\frac{y_1 - t}{(t-y_1)^2+y_2^2}\varphi_0(y)|dy|.
\end{aligned}
$$

ინტეგრალში პარამეტრიზაციის $y = (\tau\,\cos\,\alpha, \tau, \sin\,\alpha)^\top \in \mathbb{R}_\alpha$, $\tau \in \mathbb{R}^+$ და შემდეგი წარმოდგენის გამოყენებით

$$
\partial_{y_1} = \cos\,\alpha\,\partial_\tau, \quad \partial_{y_2} = \sin\,\alpha\,\partial_\tau, \quad \partial_{\ell(y)} = \cos\,\alpha\partial_{y_1} + \sin\,\alpha\partial_{y_2} = \partial_\tau
$$

და ასევე ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\psi(t) - r_+\boldsymbol{V}_{+1}\varphi(t) &= \frac{1}{2}\psi(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+} \partial_\tau\frac{\tau\,\cos\,\alpha - t}{(t-\tau\cos\,\alpha)^2+\tau^2\sin^2\alpha}\varphi_+(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{[\tau\,\cos\,\alpha - t]\varphi_0(\tau)d\tau}{t^2+\tau^2-2t\,\tau\,\cos\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\psi(t) - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\left[\frac{1}{t-e^{i\alpha}\tau} + \frac{1}{t-e^{-i\alpha}\tau}\right]\varphi_0(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}\psi(t) - \frac{1}{4\pi}\left[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{-i\alpha}}\right]\varphi_0(t).
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

მიღებულ ტოლობაში გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნა: $\partial_\tau\varphi_+(\tau) =: \varphi_0(\tau)$, (იხ. (2.32)), $\varphi_0(0) = 0$, და შემოგვაქვს შემდეგი ოპერატორები:

$$
\boldsymbol{K}^1_c\psi(t) := \int_0^\infty \frac{\psi(\tau)d\tau}{t - c\tau}, \qquad -\pi < \arg\,c < \pi, \quad \psi \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+), \tag{2.34}
$$

რომლებიც არიან მელინის კონვოლუციები -1 რიგის ერთგვაროვანი ბირთვით (იხ. [Du79, Du84b, Du86, Du82]). N_α და N^*_α ოპერატორები არიან ერთმანეთის შეუღლებულნი.

გარდა ამისა, (2.27) სისტემის პირველი განტოლების პარამეტრიზაციით და ∂_t-თი დიფერენცირებით, მივიღებთ შემდეგს:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \left[\frac{1}{2}\varphi(x) + r_\alpha \boldsymbol{V}_{-1}\psi(x)\right]_{x=(t\ \cos\ \alpha, t\ \sin\ \alpha)^\top} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\varphi_0(t) + \frac{1}{4\pi}\partial_t \int_0^\infty \ln[t^2+\tau^2-2t\,\tau\ \cos\ \alpha]\psi(\tau)\,d\tau \\
&\qquad = \frac{1}{2}\varphi_0(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{[t-\tau\ \cos\ \alpha]\psi(\tau)\,d\tau}{t^2+\tau^2-2t\,\tau\ \cos\ \alpha} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\varphi_0(t) + \frac{1}{4\pi}\left[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{-i\alpha}}\right]\psi(t) = G_1(t),
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

სადაც

$$
G_1(t) := [2r_\alpha G_1(x)]_{x=(t\ \cos\ \alpha, t\ \sin\ \alpha)^\top} := 2r_+\partial_t G_0(t\ \cos\ \alpha, t\ \sin\ \alpha).
$$

მიღებული ტოლობის გამოყენებით, (2.27) სისტემაში პირველი განტოლების პარამეტრიზაციით და ∂_t-თი დიფერენცირებით, ეს სისტემა მიიღებს ფორმას:

$$
\begin{cases}
\varphi_0 + \dfrac{1}{2\pi}\left[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{-i\alpha}}\right]\psi = G_1, \\[2ex]
\psi - \dfrac{1}{2\pi}\left[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{-i\alpha}}\right]\varphi_0 = 2r_+H_0
\end{cases}
\tag{2.36a}
$$

$$
\varphi_0, \psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+), \quad \varphi_0 = \partial_t\varphi(t\cos\ \alpha, t\sin\ \alpha), \quad G_1(t) = 2r_+\partial_t G_0(t\ \cos\ \alpha, t\ \sin\ \alpha),
$$

$$
\varphi_+(t) = \varphi(t\ \cos\ \alpha, t\ \sin\ \alpha) := \int_0^t \varphi_0(\tau)\,d\tau, \quad x := (t\ \cos\ \alpha, t\ \sin\ \alpha)^\top \in \mathbb{R}_\alpha. \tag{2.36b}
$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს (2.3) სასაზღვრო ამოცანის ექვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებას.

თეორემა 2.3 (2.3) შერეულ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$ წარმოიდგინება ფორმულით (2.23), სადაც უცნობი ფუნქციები ψ და φ_0 არიან (2.36a) სისტემის ამონახსნები $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\Omega_\alpha)$ სივრცეში და $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ აღდგება φ_0 ფუნქციის საშუალებით და ფორმულით (2.36b).

პირიქითაც, თუ ფუნქციები ψ და φ_0 არიან (2.36a) სისტემის ამონახსნები $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\Omega_\alpha)$ სივრცეში და $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ აღდგება φ_0 ფუნქციის საშუალებით და ფორმულით (2.36b), მაშინ ფუნქცია $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$ წარმოიდგინება ფორმულით (2.23) და არის (2.3) შერეულ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი.

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ: თეორემა 2.3-ის პირველი ნაწილი უკვე დამტკიცებულია. (2.25) და (2.36a) სისტემების ფრედჰოლმურად ექვივალენტურობის დასამტკიცებლად, რომელიც ჩამოყალიბებულია თეორემის დასკვნით ნაწილში, შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ვართ დაინტერესებული მიღებული სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალური განტოლების (2.36a) ლოკალურ ფრედჰოლმურობაში 0 წერტილში, რაც ემთხვევა მელინის კონვოლუციის განტოლების $\Psi - \mathrm{B}^2\Psi = H_0$ გლობალურ ცალსახად ამოხსნადობას, ჩვენ შეგვიძლია დავივიწყოთ ლოკალურად კომპაქტური ოპერატორი $\boldsymbol{K}$ (იხ (2.19)).

3. მელინის კონვოლუციის ოპერატორები $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში

ამ თავში გამოვიყენებთ დამხმარე შედეგებს სტატიებიდან [Du13] (ასევე იხ. [Du79, Du87, DD13]), რომელიც არის არსებითი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლების გამოკვლევისათვის.

განვიხილოთ მელინის კონვოლუციის ოპერატორი $\mathfrak{M}^0_a$ ბესელის პოტენციალთა სივრცეში

$$\mathfrak{M}^0_a := \mathscr{M}^{-1}_\beta a \mathscr{M}_\beta \ : \ \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+), \tag{3.1}$$

სადაც

$$\mathscr{M}_\beta \psi(\xi) := \int_0^\infty t^{\beta - i\xi}\psi(t)\frac{dt}{t}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$
$$\mathscr{M}^{-1}_\beta \varphi(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty t^{i\xi-\beta}\varphi(\xi)d\xi, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

არიან მელინის გარდამნები და ურთიერთშებრუნებულები.

ოპერატორის $\mathfrak{M}^0_a$ სიმბოლო $a(\xi)$ შეიძლება იყოს $n \times n$-ზე მატრიც-ფუნქცია, მაშინ (3.1)-ში მითითებული სივრცეები წარმოადგენენ n-ვექტორულ სივრცეებს. ვიგულისხმებთ, რომ $a \in C\mathfrak{M}^0_p(\overline{\partial\Omega_\alpha})$ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე $\mathbb{R}$ შეიძლება გააჩნდეს წყვეტა მხოლოდ უსასრულობაში.

მელინის კონვოლუციის ოპერატორის ერთერთი მნიშვნელოვანი მაგალითია შემდეგი ინტეგრალური ოპერატორი

$$\mathfrak{M}^0_a\varphi(t) := c_0\varphi(t) + \frac{c_1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)\,dt}{\tau - t} + \int_0^\infty \mathscr{K}\left(\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.2}$$

$n \times n$-ზე მატრიცული კოეფიციენტებით და $n \times n$-ზე მატრიცული გულით. $\mathfrak{M}^0_a$ არის შემოსაზღვრული ოპერატორი წონიან ლებეგის სივრცეში

$$\mathfrak{M}^0_a \ : \ \mathbb{L}_p(t^\gamma, \mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{L}_p(t^\gamma, \mathbb{R}^+), \tag{3.3}$$

$$\beta := \frac{1+\gamma}{p}, \quad 1 < p < \infty, \quad -1 < \gamma < p - 1,$$

შესაბამისი ნორმით

$$\|\varphi|\mathbb{L}_p(t^\gamma, \mathbb{R}^+)\| := \left[\int_0^\infty t^\gamma|\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}.$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში მატრიცული ბირთვის ყველა ელემენტზე

$$\int_0^\infty t^{\beta-1}\mathscr{K}(t)dt < \infty, \quad 0 < \beta < 1 \tag{3.4}$$

(იხ. [Du79]). (3.2) ოპერატორის სიმბოლო არის ბირთვის მელინის გარდაქმნა

$$a_\beta(\xi) := c_0 + c_1 \coth \pi\,(i\beta+\xi) + \mathscr{M}_\beta \mathscr{K}(\xi)$$
$$:= c_0 + c_1 \coth \pi\,(i\beta+\xi) + \int_0^\infty t^{\beta-i\xi}\mathscr{K}(t)\frac{dt}{t}, \quad \xi\in\mathbb{R} \tag{3.5}$$

და სიმბოლო არის პასუხისმგებელი ოპერატორის ფრედჰოლმურობის თვისებაზე.

ცხადია,

$$\mathfrak{M}^0_a \mathfrak{M}^0_b \varphi = \mathfrak{M}^0_{ab}\varphi = \mathfrak{M}^0_b \mathfrak{M}^0_a \varphi, \qquad \varphi\in\mathbb{L}_p(t^\gamma,\mathbb{R}^+), \tag{3.6}$$

იმ პირობით, თუ $\mathfrak{M}^0_a$ და $\mathfrak{M}^0_a$ ოპერატორები არიან შემოსაზღვრულები $\mathbb{L}_p(t^\gamma,\mathbb{R}^+)$ სივრცეში.

თეორემა 3.4 (იხ. [Du79]) ვთქვათ, $1<p<\infty$ და $-1<\gamma<p-1$ (ან $0\leqslant p\leqslant\infty$ პირობით, თუ $c_1=0$ (4.4)-ში). $\mathfrak{M}^0_a$ ოპერატორი (3.2) (3.3)-ში არის ფრედჰოლმის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი სიმბოლო შებრუნებადია (ელიფსურია)

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |\det a_\beta(\xi)| > 0. \tag{3.7}$$

თუ სიმბოლო ელიფსურია, ეს ოპერატორი შებრუნებადია და მისი შებრუნებულია $\mathfrak{M}^0_{a^{-1}}$ ოპერატორი.

ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში სიტუაცია სხვანაირია. გავიხსენოთ ზოგიერთი შედეგი [Du13, § 2] ნაშრომიდან.

განვიხილოთ ბირთვები, რომლების არიან უსასრულობაში ქრობადი მერომორფული ფუნქციები $\mathbb{C}$ კომპლექსურ სიბრტყეზე

$$\mathscr{K}(t) := \sum_{j=0}^\infty \frac{d_j}{(t-c_j)^{m_j}}, \qquad c_j\neq 0, \quad j=0,1,\dots,$$
$$0<\alpha_k := |\arg c_k| \leqslant \pi, \quad k=\ell+1,\ell+2,\dots \tag{3.8}$$

კვანძებით $c_0,c_1,\ldots\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ და კომპლექსური კოეფიციენტებით $d_j\in\mathbb{C}$.

განმარტება 3.5 ვიტყვით, რომ (3.8) ფორმულით წარმოდგენილი ბირთვი $\mathscr{K}(t)$ არის დასაშვები თუ:

i. $\mathscr{K}(t)$ აქვს კვანძების მხოლოდ სასრული რაოდენობა $c_0,\ldots,c_\ell$ რომლებიც ეკუთვნიან დადებით ნახევარღეძს, ე.ი. $\arg c_0=\cdots=\arg c_\ell=0$;
ii. შესაბამისი მულტიპლიკატორები $m_0=\cdots=m_\ell=1$;
iii. სასრული რაოდენობა წერტილების $c_0>0,\ldots,c_\ell>0$ ამოგდების შემდეგ წერტილების სიმრავლეს $c_{\ell+1},c_{\ell+2},\ldots$ გამომდინარე (i ii) პირობიდან არ გააჩნიათ დაგროვების წერტილები დადებით ნახევარღერძზე და მათი ნამდვილი ნაწილები არიან თანაბრად შემოსაზღვრული

$$\varliminf_{j\to\infty} c_j \notin [0,\infty), \qquad \sup_{j=\ell+1,\ell+2,\ldots} \operatorname{Re} c_j \leqslant K<\infty. \tag{3.9}$$

მელინის კონვოლუციის ოპერატორს

$$\boldsymbol{K}^m_c\psi(t) := \int_0^\infty \frac{\tau^{m-1}\psi(\tau)d\tau}{t-c\tau}^m, \qquad -\pi < \arg\, c < \pi, \quad \psi \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \tag{3.10}$$

(იხ. (2.34) $m = 1$-თვის) დასაშვები ბირთვი ნებისმიერი $m = 1, 2, \ldots$ ერთადერთი შეზღუდვით: თუ c არის ნამდვილი და დადებითი $\arg\, c = 0$, მაშინ აუცილებლად $m = 1$.

წინადადება 3.6 (იხ. [Du13], შედეგი 2.3) ვთქვათ (3.3) პირობები სრულდება, $\mathscr{K}(t)$ წარმოადგენს დასაშვებ ბირთვს

$$K_\beta := \frac{\pi}{|\sin\, \pi\beta|}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{m_j}\left(\begin{array}{c}\beta-1\\ m_j\end{array}\right)|c_j|^{\beta-m_j}|d_j| < \infty. \tag{3.11}$$

მაშინ მელინის კონვოლუცია $\mathfrak{M}^0_{a_\beta}$

$$\mathfrak{M}^0_a\varphi(t) := c_0\varphi(t) + \int_0^\infty \mathscr{K}\left(\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

დასაშვები მერომორფული გულით $\mathscr{K}(t)$ (3.8)-ში არის შემოსაზღვრული ლებეგის სივრცეში $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+, t^\gamma)$ და ნორმა შეფასებულია მუდმივით $\|\mathfrak{M}^0_{a_\beta}\| \leqslant MK_\beta$ ზოგიერთი $M > 0$-თვის.

კერძოდ, მერომორფული ბირთვისთვის მარტივი კვანძებით $m_0 = m_1 = \cdots = 1$ გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$|\mathfrak{M}^0_{a_\beta}\| \leqslant MK_\beta = \frac{2\pi M}{|\sin\, \pi\beta|}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{m_j}|d_j||c_j|^{\beta-1}.$$

შეგვიძლია დავივიწყოთ M მუდმივი და 2^{m_j} შევცვალოთ $2^{\frac{m_j}{2}}$-ით შეფასებაში პირობით $\mathrm{Re}\, c_j < 0$ ყველა $j = 0, 1, \ldots$.

თეორემა 3.7 (იხ. [Du13], თეორემა 2.4) მელინის კონვოლუციის ოპერატორი $\boldsymbol{K}^m_c$ ტოლობაში (3.10) დასაშვები ბირთვით არის შემოსაზღვრული ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში

$$\boldsymbol{K}^m_c \;:\; \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+) \tag{3.12}$$

ყველა $s \in \mathbb{R}$-თვის და $1 < p < \infty$-თვის.

გავიხსენოთ(3.7) ფორმულები [Du13,] ნაშრომიდან, რომელიც გვაძლევს (2.34) ფორმულაში მონაწილე $\boldsymbol{K}^m_c$ ოპერატორის (ბირთვის მელინის გარდაქმნა) სიმბოლოს:

$$\mathscr{M}_\beta\mathscr{K}^m_c(\xi) = -\left(\begin{array}{c}\beta-i\xi-1\\ m-1\end{array}\right)\frac{\pi e^{\mp\pi(\beta-i\xi)i}}{\sin\pi(\beta-i\xi)}c^{\beta-i\xi-m}, \quad 0 < \pm\arg c < \pi, \tag{3.13}$$

სადაც

$$\begin{pmatrix} \mu-1 \\ n \end{pmatrix} := \frac{(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!}, \qquad \begin{pmatrix} \mu-1 \\ 0 \end{pmatrix} := 1.$$

კერძოდ (იხ (2.8)-(2.10) ფორმულები [Du13,]-ში)

$$\mathscr{M}_\beta \mathscr{K}^1_c(t) = -\frac{\pi e^{\mp\pi(\beta-i\xi)i} c^{\beta-i\xi-1}}{\sin \pi(\beta-i\xi)}, \qquad 0 < \pm \arg c < \pi, \tag{3.14}$$

$$\mathscr{M}_\beta \mathscr{K}^1_{-d}(t) = \frac{\pi d^{\,\beta-i\xi-1}}{\sin \pi(\beta-i\xi)}, \qquad 0 < |\arg d| < \pi, \tag{3.15}$$

$$\mathscr{M}_\beta \mathscr{K}^1_{-1}(t) = \frac{\pi}{\sin \pi(\beta-i\xi)}. \tag{3.16}$$

თეორემა 3.8 ([Du13], თეორემა 4.1) ვთქვათ, $0 < |\arg\gamma| < \pi$, $0 < |\arg c| < \pi$, $0 < |\arg(\gamma\, c)| < \pi$, $r, s \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, $1 < p < \infty$. მაშინ $K^m_c \ :\ \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ ოპერატორი არის შემდეგი ოპერატორის ექვივალენტური

$$\boldsymbol{A}^{m,s}_c := \Lambda^s_{-\gamma} \boldsymbol{K}^m_c \Lambda^{-s}_\gamma \ :\ \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+), \tag{3.17a}$$

სადაც

$$\boldsymbol{A}^{m,s}_c = \begin{cases} e^{\sigma(c,\gamma)\pi si} c^{-s} \boldsymbol{K}^m_c W_{g^s_{\gamma,c}} & \text{თუ} \quad -\pi < \arg\gamma\, c < 0, \\ e^{\sigma(c,\gamma)\pi si} c^{-s} \left[\boldsymbol{K}^m_c W_{g^s_{\gamma,c}} - (-1)^m \boldsymbol{K}^m_{-c} H_{g^s_{\gamma,c}}\right] & \text{თუ} \quad 0 < \arg\gamma\, c < \pi, \end{cases} \tag{3.17b}$$

$$H_{g^s_{\gamma,c}} = \begin{cases} I + T & \text{თუ} \quad \arg(\gamma\, c)\cdot \arg\gamma < 0, \\ H_{g^s_\infty} + T = e^{\pi si}\left[\cos \pi s I - \dfrac{\sin \pi s}{\pi} \boldsymbol{K}^1_{-1}\right] + T & \text{თუ} \quad \arg(\gamma\, c)\cdot\arg\gamma > 0, \end{cases} \tag{3.17c}$$

$$g^s_{\gamma,c}(\xi) := \left(\frac{\xi - c\gamma}{\xi+\gamma}\right)^s, \qquad g^s_\infty(\xi) := \frac{1}{2}[e^{2\pi si}+1] + \frac{1}{2}[e^{2\pi si}-1]\operatorname{sign}\xi, \tag{3.17d}$$

$\sigma(c,\gamma)$ განმარტებულია ტოლობით

$$\sigma(c,\gamma) := \begin{cases} 0 & \text{თუ} \quad 0 < \arg c < \pi, \\ \operatorname{sign}\arg(\gamma\, c) - \operatorname{sign}\arg\gamma & \text{თუ} \quad -\pi < \arg c < 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

და T არის კომპაქტური ოპერატორი $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში.

განვიხილოთ მთლიანი კონვოლუციის ოპერატორი

$$\mathrm{A} := d_0 I + W_a + \sum_{j=1}^n d_j \boldsymbol{K}^{m_j}_{c_j} \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \quad a \in C\mathfrak{M}_p(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}) \tag{3.19}$$

მუდმივი კოეფიციენტებით $d_0, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$ ბესელის პოტენციალთა სივრცეში $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$.

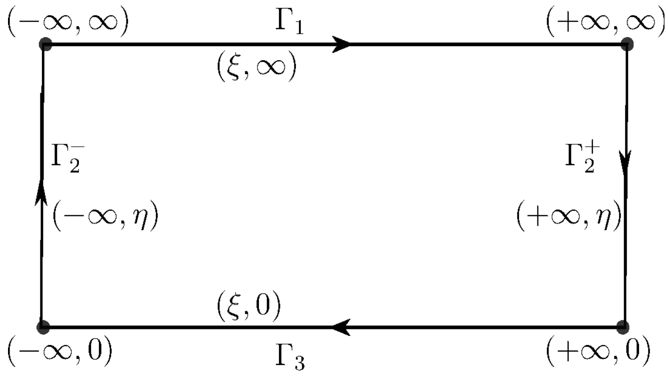


Figure 1.

(3.19) ოპერატორის სიმბოლოს დასაწერად განვიხილოთ საათის ისრის მიმართულებით ორიენტირებული მართკუთხედი $\mathfrak{R} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3$, სადაც (იხ. ნახაზი 2)

$$\Gamma_1 := \overline{\mathbb{R}} \times \{+\infty\}, \quad \Gamma_2^{\pm} := \{\pm\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}^+, \quad \Gamma_3 := \overline{\mathbb{R}} \times \{0\}.$$

(3.19) ტოლობაში $\boldsymbol{A}$ ოპერატორის სიმბოლო $\mathscr{A}_p^s(\omega)$ არის ფუნქცია $\mathfrak{R}$ სიმრავლეზე განმარტებული შემდეგნაირად,

$$\mathscr{A}_p^s(\omega) := \begin{cases} d_0 g_p^s(\xi) + a_p^s(\infty,\xi) + \sum\limits_{j=1}^{m} e^{\sigma(c_j,\gamma)\pi s i} c_j^{-s} d_j \mathscr{K}_{c_j,p}^{m_j}(\xi) + \sum\limits_{j=m+1}^{n} e^{\sigma(c_j,\gamma)\pi s i} c_j^{-s} d_j & \\ \times \Big[\mathscr{K}_{c_j,p}^{m_j}(\xi) \mathscr{W}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi) - (-1)^{m_j} \mathscr{K}_{-c_j,p}^{m_j}(\xi) \mathscr{H}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi) \Big] & \omega = (\xi,\infty) \in \overline{\Gamma_1}, \\ \{d_0 + a(-\eta)\} \left(\dfrac{\eta+\gamma}{\eta-\gamma} \right)^s & \omega = (+\infty,\eta) \in \Gamma_2^+, \\ \{d_0 + a(\eta)\} \left(\dfrac{\eta-\gamma}{\eta+\gamma} \right)^s & \omega = (-\infty,\eta) \in \Gamma_2^-, \\ e^{\pi s i}\{d_0 + a_p(0,\xi)\} + \sum\limits_{j=1}^{m} e^{[\sigma(c_j,\gamma)+1]\pi s i} d_j \mathscr{K}_{c_j,p}^{m_j}(\xi) + \sum\limits_{j=m+1}^{n} e^{\sigma(c_j,\gamma)\pi s i} c_j^{-s} d_j & \\ \times \Big[e^{\pi s i} \mathscr{K}_{c_j,p}^{m_j}(\xi) - (-1)^{m_j} \mathscr{K}_{-c_j,p}^{m_j}(\xi) \mathscr{H}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi) \Big] & \omega = (\xi,0) \in \overline{\Gamma_3}, \end{cases} \tag{3.20}$$

სადაც

$$\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,c,p}}(\infty,\xi) := \begin{cases} 0 & \text{თუ} \quad \arg(\gamma\, c) < 0, \\ \\ 1 & \text{თუ} \quad \arg(\gamma\, c) > 0, \quad \arg\gamma < 0, \\ \\ e^{\pi si}\left[\cos\pi s - \dfrac{\sin\pi s}{\sin\pi(1/p - i\xi)}\right] & \text{if} \quad \arg(\gamma\, c) > 0, \quad \arg\gamma > 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\mathscr{W}_{g^s_{\gamma,c,p}}(\infty,\xi) := \begin{cases} 1 & \text{თუ} \quad \arg(\gamma\, c)\cdot\arg\gamma < 0, \\ \\ e^{\pi si}\left[\cos\pi s - \sin\pi s\,\cot\pi(1/p - i\xi)\right] & \text{თუ} \quad \arg(\gamma\, c)\cdot\arg\gamma > 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} a^s_p(\infty,\xi) &:= \frac{1}{2}[e^{2\pi si}a(+\infty) + a(-\infty)] - \frac{1}{2}[e^{2\pi si}a(+\infty) - a(-\infty)]\cot\pi\left(\frac{1}{p} - i\xi\right), \\ a_p(t,\xi) &:= \frac{1}{2}[a(t+0) + a(t-0)] - \frac{1}{2}[a(t+0) - a(t-0)]\cot\pi\left(\frac{1}{p} - i\xi\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

თეორემა 3.9 ([Du13], თეორემა 4.2) ვთქვათ, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ და A განმარტებულია (3.19)-ით. ოპერატორი $\mathrm{A} : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ არის ფრედჰოლმის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი სიმბოლო $\mathscr{A}^s_p(\omega)$, განმარტებული (3.20) (3.23) ტოლობით არის ელიფსური. თუ A ფრედჰოლმისაა, მაშინ მისი ინდექსი

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{A} = -\mathrm{ind}\det\mathscr{A}^s_p. \tag{3.24}$$

შედეგი 3.10 ვთქვათ,$1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ და A განმარტებულია (3.19) ტოლობით. თუ ოპერატორი $\mathrm{A} : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ ფრედჰოლმისაა (შებრუნებადია) ყველა $a \in (s_0, s_1)$-თვის და $p \in (p_0, p_1)$-თვის, სადაც $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$, $1 < p_o < p_1 < \infty$, მაშინ

$$\mathrm{A} : \widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^+), \qquad s \in (s_0, s_1), \quad p \in (p_0, p_1) \tag{3.25}$$

ფრედჰოლმისაა და ინდექსები ტოლია

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{A} = -\mathrm{ind}\det\mathscr{A}^s_p. \tag{3.26}$$

(შესაბამისად არის შექცევადი) სობოლევ-სლობოდევსკის (ბესოვის) სივრცეში $\mathbb{W}^s_p = \mathbb{B}^s_{p,p}$.

4. სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლების გამოკვლევა

მიღებული სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლების (2.36a) გამოკვლევა ხდება ბურებრივ ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$, მაგრამ სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლება მიიღება სასაზღვრო ამოცანისაგან სობოლევ-სლობოდევსკის სივრცეში $\mathbb{W}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$. ამიტომ მიღებულ განტოლებას გამოვიკვლევთ ბესელის პოტენციალთა სივრცეში და შემდეგ საინტერპოლაციო თეორემის მეშვეობით ამ განტოლების ამოხსნადობაზე გავაკეთებთ დასკვნებს სობოლევ-სლობოდევსკის სივრცეში.

თეორემა 4.11 ვთქვათ, $1 < p < \infty$ და $G_1,\ r_+H_0 \in \mathbb{H}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$.

(2.36a) სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნის ერთადერთი წყვილი $\varphi_0, \psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, თუ $G_1,\ r_+H_0 \in \mathbb{W}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$, მაშინ (2.36a) სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნის ერთადერთი წყვილი $\varphi_0, \psi \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში.

დამტკიცება: (2.36a) სისტემა გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\mathrm{B}_\alpha \Phi = \mathrm{G}, \tag{4.1}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \qquad \mathrm{G}_\alpha := \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_1 \\ 2r_+H_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+),$$

$$\mathrm{B}_\alpha = \begin{bmatrix} I & \boldsymbol{A}_\alpha \\ -\boldsymbol{A}_\alpha & I \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_\alpha = \frac{1}{4\pi}\left[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{-i\alpha}}\right].$$

და გამოვიკვლიოთ ოპერატორი $\mathrm{B}_\alpha := : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^{-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ თეორემა 3.9-ის დახმარებით. ამისთვის განვიხილოთ მატრიც-ფუნქცია

$$\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,\lambda) := \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & \lambda\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi) \\ -\lambda\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi) & 1 \end{bmatrix}, & \omega = (\xi,\infty) \in \overline{\Gamma_1}, \\[2ex] \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\eta+\gamma}{\eta-\gamma}\right)^s & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\eta+\gamma}{\eta-\gamma}\right)^s \end{bmatrix}, & \omega = (+\infty,\eta) \in \Gamma^+_2, \\[2ex] \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\eta-\gamma}{\eta+\gamma}\right)^s & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\eta-\gamma}{\eta+\gamma}\right)^s \end{bmatrix}, & \omega = (-\infty,\eta) \in \Gamma^-_2, \\[2ex] e^{\pi s i}\begin{bmatrix} 1 & \lambda\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi) \\ -\lambda\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi) & 1 \end{bmatrix}, & \omega = (\xi,0) \in \overline{\Gamma_3}, \end{cases} \tag{4.2}$$
$$1 \leqslant \lambda \leqslant 1, \qquad -1 < s < 1, \qquad 0 < \beta := \frac{1}{p} < 1,$$

რომელიც ემთხვევა B_α ოპერატორის სიმბოლოს $\lambda = 1$-თვის, ე.ი. $\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega) = \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,1)$

რადგან სისტემა (2.36a) ექვივალენტურია (4.1) სისტემის და უკანასკნელი თავის მხრივ ექვივალენტურია (2.3) შერეული სასაზღვრო ამოცანის (იხ. თეორემა 2.3), ერთადერთობის თეორემის 2.2 ძალით (2.36a) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში. ამის გამო საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ სისტემა (2.36a) არის ფრედჰოლმის $\widetilde{\mathbb{W}}^{1-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში და გააჩნია ინდექსი 0

$$\operatorname{Ind}\mathrm{B}_\alpha = 0. \tag{4.3}$$

ეს ფორმულა ერთადერთობის შედეგთან ერთად $\operatorname{Ker}\mathrm{B}_\alpha = 0$, გვაძლევს $\operatorname{Coker}\mathrm{B}_\alpha = 0$ და მატრიცული ოპერატორის $\mathrm{B}_\alpha : \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}_p(\mathbb{R}^+)$ შებრუნებადობა უზრუნველყოფილია ყველა $1 < p < \infty$.

თუ გამოვიყენებთ ნამდვილი ინტერპოლაციის ფუნქტორს (იხ. [Tr95]), ადვილად დავასკვნით ოპერატორის $\mathrm{B}_\alpha : \widetilde{\mathbb{W}}^{-1/2}_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}^{-1/2}_p(\mathbb{R}^+)$ ყველა $1 < p < \infty$.

თუ $c_1 := e^{i\alpha}$, $c_2 = e^{-i\alpha}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ მაშინ არსებობს γ, $\arg\gamma > 0$ ისეთი, რომ

$$-\pi < \arg\gamma\, c_j < 0, \qquad j = 1,2, \qquad \sigma(c_1,\gamma) = 0, \qquad \sigma(c_2,\gamma) = -2,$$
$$c_1^{-s} = e^{-i\alpha s}, \qquad c_2^{-s} = e^{i\,\alpha\, s} \tag{4.4}$$

და $\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi)=\mathscr{W}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi)=1$ მაშინ (4.1), (3.20) და (3.14)--(3.16), სიმბოლო არის

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\left[e^{\sigma(e^{i\alpha},\gamma)\pi si}e^{-i\alpha\,s}\mathscr{K}^1_{e^{i\alpha},p}(\xi)+e^{\sigma(e^{-i\alpha},\gamma)\pi si}e^{i\alpha\,s}\mathscr{K}^1_{e^{-i\alpha},p}(\xi)\right]\\
&= -\frac{e^{-\pi(\beta-i\xi)i+\alpha(\beta-i\xi-1)i-\alpha\,si}+e^{-2\pi\,si+\pi(\beta-i\xi)i-\alpha(\beta-i\xi-1)i+\alpha\,si}}{2\sin\pi(\beta-i\xi)}\\
&= -\frac{e^{-i\pi\,s}\cos\left[\alpha+(\pi-\alpha)(\beta-s-i\xi)\right]}{\sin\pi(\beta-i\xi)},\\
\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\left\{e^{(\sigma(e^{i\alpha},\gamma)+1)\pi si}\mathscr{K}^1_{e^{i\alpha},p}(\xi)+e^{(\sigma(e^{-i\alpha},\gamma)+1)\pi\,si}\mathscr{K}^1_{e^{-i\alpha},p}(\xi)\right\}\\
&= -\frac{e^{-\pi(\beta-i\xi)i+\alpha(\beta-i\xi-1)i+\pi\,si}+e^{-2\pi\,si+\pi(\beta-i\xi)i-\alpha(\beta-i\xi-1)i+\pi\,si}}{2\sin\pi(\beta-i\xi)}\\
&= -\frac{\cos\left[\pi\,s-\alpha-(\pi-\alpha)(\beta-i\xi)\right]}{\sin\pi(\beta-i\xi)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda) &= \det\begin{bmatrix}1 & \lambda\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\\ -\lambda\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi) & 1\end{bmatrix}=1+\lambda^2\left[\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\right]^2\\
&= 1+\lambda^2\frac{e^{-2\pi si}\cos^2\left[-\pi\,s+\alpha(s+1)+(\pi-\alpha)(\beta-i\xi)\right]}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)}\\
&= \frac{\sin^2\pi(\beta-i\xi)+\lambda^2e^{2\pi\,si}\cos^2\left[-\pi\,s+\alpha(s+1)+(\pi-\alpha)(\beta-i\xi)\right]}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)}\\
&\qquad\text{on}\quad \overline{\Gamma_1},
\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\det\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda) &= \det\begin{bmatrix}1 & \lambda\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\\ -\lambda\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi) & 1\end{bmatrix}=1+\lambda^2\left[\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\right]^2\\
&= 1+\lambda^2\frac{\cos^2\left[\pi\,s-\alpha-(\pi-\alpha)(\beta-i\xi)\right]}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)}\\
&= \frac{\sin^2\pi(\beta-i\xi)+\lambda^2\cos^2\left[\pi\,s-\alpha-(\pi-\alpha)(\beta-i\xi)\right]}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)}\quad\text{on}\quad\overline{\Gamma_3}.
\end{aligned}\tag{4.6}$$

(4.5) და (4.6) ფორმულებში პირველი შესაკრები

$$\sin^2\pi(\beta-i\xi)=\left[\sin\pi\beta\cosh\pi\xi+i\cos\pi\beta\sinh\pi\xi\right]^2,\tag{4.7}$$
$$\cosh\pi\xi:=\frac{1}{2}\left[e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}\right]\quad \sinh\pi\xi=\frac{1}{2}\left[e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}\right]$$

დომინირებს მეორე შესაკრებს, როცა $\xi\neq 0$ და ამიტომ ცხადია, რომ

$$\begin{aligned}
&\det\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda)\neq 0\quad\text{ყველა}\quad 0\neq\xi\in\mathbb{R},\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi,\quad 0<\beta<1,\\
&\qquad -1<s<1,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1\quad \overline{\mathfrak{R}-\text{წირზე}}.
\end{aligned}\tag{4.8}$$

$\xi = 0$-თვის (4.5) ტოლობაში გამოვიყენოთ დაშლა $e^{-2\pi\, si} = \cos(2\pi\, s) - i\sin(2\pi\, s)$ და ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები გავუტოლოთ 0-ს, მივიღებთ, რომ $\det \mathscr{B}^{1-1/p}_{\alpha,1/p}(0) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ

$$\sin^2 \pi\beta + \lambda^2 \cos(2\pi\, s)\cos^2(\pi\, s - \alpha - (\pi - \alpha)\beta) = 0, \tag{4.9a}$$

$$\sin(2\pi\, s)\cos^2(\pi\, s - \alpha - (\pi - \alpha)\beta) = 0. \tag{4.9b}$$

განტოლების (4.9b) ამონახსნებია $s = 0, \pm 1/2.$ მაშინ $\sin(2\pi\, s) = 0$ და ან $\cos(2\pi\, s) = 1$ (თუ $s = 0$) ან კიდევ $\cos(2\pi\, s) = -1$ (თუ $s = \pm 1/2$). პირველი მათგანი $s = 0$ არ წარმოადგენს განტოლების (4.9a) ამონახსნს, რადგან $\sin^2 \pi\beta > 0$ და, მაშასადამე,

$$\sin^2 \pi\beta + \lambda^2 \cos^2[(\pi - \alpha)(\beta - s) + \alpha] \neq 0.$$

ხოლო, თუ $s = \pm 1/2$ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$\sin^2 \pi\beta - \cos^2\left[(\pi - \alpha)\left(\beta \mp \frac{1}{2}\right) + \alpha\right] = \sin^2 \pi\beta - \sin^2\left[\pi\beta - \left(\beta - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha\right]$$
$$= \sin\left[2\pi\beta - \left(\beta - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha\right]\sin\left(\beta - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha = 0$$

რომელსაც აქვს შემდეგი ამონახსნები

$$2\pi\beta - \left(\beta - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha = 0, \pm\pi, \qquad \left(\beta - 1 \mp \frac{1}{2}\right)\alpha = 0, \pm\pi,$$
$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \text{for each} \quad 0 < \beta < 1$$

რომლებიც წარმოადგენენ აკრძალულ კუთხეს.

განტოლების (4.9b) სხვა ამონახსნია $\cos^2(\pi\, s - \alpha - (\pi - \alpha)\beta) = 0$, რომელიც არ წარმოადგენს განტოლების (4.9a) ამონახსნს, რადგან $\sin^2 \pi\beta > 0$. მაშასადამე,

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(0, \lambda) \neq 0 \qquad \text{ყველა} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad \text{on} \quad 0 < \beta < 1, \quad \overline{\Gamma_1}. \tag{4.10}$$
$$-1 < s < 1, \quad s \neq \pm\frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad s = \pm\frac{1}{2}$$

პირობით, რომ $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ არ არის ტრანსცენდენტული განტოლების (2.7) ამონახსნი.

აგრეთვე გვაქვს

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(0, \lambda) = \frac{\sin^2 \pi\beta + \lambda^2 \cos^2\left[\pi\, s - \alpha - (\pi - \alpha)\beta\right]}{\sin^2 \pi\beta} \neq 0 \quad \text{on} \quad \overline{\Gamma_3}. \tag{4.11}$$

რადგან $\sin^2 \pi\beta > 0$.

პირობებიდან (4.8), (4.10) და (4.11) გამომდინარეობს

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda) \neq 0 \qquad \text{ყველა} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < 1, \tag{4.12}$$
$$-1 < s < 1, \quad s \neq \pm\frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \text{on} \quad \omega \in \mathfrak{R} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3.$$

თუ $c_1 := e^{i\alpha}$, $c_2 = e^{-i\alpha}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ მაშინ არსებობს γ, arg $\gamma > 0$ ისეთი, რომ

$$0 < \arg\, \gamma\, c_j < \pi, \qquad j = 1,2, \qquad \sigma(c_1,\gamma) = 0, \qquad \sigma(c_2,\gamma) = 0,$$
$$c_1^{-s} = e^{-i\alpha s}, \qquad c_2^{-s} = e^{i\,\alpha\, s} \tag{4.13}$$

და

$$\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi) = e^{\pi s i}\left[\cos\,\pi s - \frac{\sin\,\pi s}{\sin\pi(\beta - i\xi)}\right] \tag{4.14}$$

$$\mathscr{W}_{g^s_{\gamma,c_j,p}}(\infty,\xi) = e^{\pi s i}\left[\cos\,\pi s - \sin\,\pi s\,\cot\,\pi(\beta - i\xi)\right] \tag{4.15}$$

მაშინ როცა $\arg(\gamma\, c)\cdot \arg\,\gamma > 0$ (იხილეთ (3.25) და (3.26)). მაშინ სიმბოლო გამოითვლება

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} e^{\sigma(e^{i\alpha},\gamma)\pi s i} e^{-i\alpha\, s}\left[\mathscr{K}^1_{e^{i\alpha},p}(\xi)\mathscr{W}_{g^s_{\gamma,e^{i\alpha},p}}(\infty,\xi) + \mathscr{K}^1_{-e^{\alpha i},p}(\xi)\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,e^{i\alpha},p}}(\infty,\xi)\right]\\
&\quad + \frac{1}{2\pi} e^{\sigma(e^{-i\alpha},\gamma)\pi s i} e^{i\alpha\, s}\left[\mathscr{K}^1_{e^{-i\alpha},p}(\xi)\mathscr{W}_{g^s_{\gamma,e^{-i\alpha},p}}(\infty,\xi) + \mathscr{K}^1_{-e^{-\alpha i},p}(\xi)\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,e^{-i\alpha},p}}(\infty,\xi)\right]\\
&= -e^{\pi s i}\frac{\cos\left[\alpha(s+1) + (\pi-\alpha)(\beta - i\xi)\right]}{\sin\pi(\beta - i\xi)}\left[\cos\pi s - \sin\pi s\cot\pi(\beta - i\xi)\right]\\
&\quad - e^{\pi s i}\frac{\cos\,\left[\alpha(s+1) - \alpha(\beta - i\xi)\right]}{\sin\pi(\beta - i\xi)}\left[\cos\pi s - \frac{\sin\pi s}{\sin\pi(\beta - i\xi)}\right]\\
&= -\frac{e^{\pi s i}}{\sin\pi(\beta - i\xi)}\widetilde{\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}}(\xi) \qquad \text{on} \quad \overline{\Gamma_1}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}}(\xi) :=& \Big(\cos\,\left[\alpha(s+1) + (\pi-\alpha)(\beta - i\xi)\right]\left[\cos\pi s - \sin\pi s\cot\pi(\beta - i\xi)\right]\\
&+ \cos\,\left[\alpha(s+1) - \alpha(\beta - i\xi)\right]\left[\cos\pi s - \frac{\sin\pi s}{\sin\pi(\beta - i\xi)}\right]\Big), \qquad \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} e^{\sigma(e^{i\alpha},\gamma)\pi s i} e^{-i\alpha s}\left[e^{\pi s i}\mathscr{K}^1_{e^{i\alpha},p}(\xi) + \mathscr{K}^1_{-e^{\alpha i},p}(\xi)\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,e^{i\alpha},p}}(\infty,\xi)\right]\\
&+ \frac{1}{2\pi} e^{\sigma(e^{-i\alpha},\gamma)\pi s i} e^{i\alpha s}\left[e^{\pi s i}\mathscr{K}^1_{e^{-i\alpha},p}(\xi) + \mathscr{K}^1_{-e^{-\alpha i},p}(\xi)\mathscr{H}_{g^s_{\gamma,e^{-i\alpha},p}}(\infty,\xi)\right]\\
&= -e^{\pi s i}\frac{\cos\left[\alpha(s+1) + (\pi-\alpha)(\beta - i\xi)\right]}{\sin\pi(\beta-i\xi)}\\
&- e^{\pi s i}\frac{\cos\left[\alpha(s+1) - \alpha(\beta - i\xi)\right]}{\sin\pi(\beta-i\xi)}\left[\cos\pi s - \frac{\sin\pi s}{\sin\pi(\beta-i\xi)}\right]\\
&= -\frac{e^{\pi s i}}{\sin\pi(\beta-i\xi)}\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta}(\xi) \qquad \text{on} \quad \overline{\Gamma_3}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta}(\xi) := \big(&\cos\left[\alpha(s+1) + (\pi-\alpha)(\beta - i\xi)\right]\\
&+ \cos\left[\alpha(s+1) - \alpha(\beta - i\xi)\right]\left[\cos\pi s - \frac{\sin\pi s}{\sin\pi(\beta-i\xi)}\right]\big) \qquad \xi\in\mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
\det\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda) &= \det\begin{bmatrix} 1 & \lambda\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\\ -\lambda\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi) & 1\end{bmatrix} = 1 + \lambda^2\left[\mathscr{A}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\right]^2\\
&= 1 + \lambda^2\frac{e^{2\pi s i}(\widetilde{\mathscr{A}}^s_{\alpha,\beta})^2(\xi)}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)}\\
&= \frac{\sin^2\pi(\beta-i\xi) + \lambda^2 e^{2\pi s i}(\widetilde{\mathscr{A}}^s_{\alpha,\beta})^2(\xi)}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)} \qquad \text{on} \quad \overline{\Gamma_1},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\det\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda) &= \det\begin{bmatrix} 1 & \lambda\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\\ -\lambda\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi) & 1\end{bmatrix} = 1 + \lambda^2\left[\mathscr{D}^s_{\alpha,\beta}(\xi)\right]^2\\
&= 1 + \lambda^2\frac{e^{2\pi s i}(\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta})^2(\xi)}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)}\\
&= \frac{\sin^2\pi(\beta-i\xi) + \lambda^2 e^{2\pi s i}(\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta})^2(\xi)]}{\sin^2\pi(\beta-i\xi)} \quad \text{on} \quad \overline{\Gamma_3}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

(4.20) და (4.21) ფორმულებში პირველი შესაკრები, რომელიც წარმოიდგინება (4.7) ფორმულით, დომინირებს მეორე შესაკრებს $\lambda^2 e^{2\pi s i}(\widetilde{\mathscr{A}}^s_{\alpha,\beta})^2(\xi)$ და $\lambda^2 e^{2\pi s i}(\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta})^2(\xi)$, თუ $\xi \neq 0$ და $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
\det\mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\xi,\lambda) \neq 0 \quad \text{ყველა} \quad 0\neq\xi\in\mathbb{R}, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \quad 0<\beta<1,\\
-1<s<1, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1 \quad \overline{\Gamma_1\cup\Gamma_3} \quad \text{რკალზე}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$\xi = 0$ შემთხვევაში (4.21) ფორმულაში გამოვიყენოთ შემდეგი დაშლა $e^{2\pi\, si} = \cos(2\pi\, s) - i\sin(2\pi\, s)$ და ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები გავუტოლოთ 0-ს, მივიღებთ, რომ $\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(0) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sin^2 \pi\beta + \lambda^2 \cos(2\pi\, s)(\widetilde{\mathscr{A}}^s_{\alpha,\beta})^2(0) = 0, \tag{4.23a}$$

$$\sin(2\pi\, s)(\widetilde{\mathscr{A}}^s_{\alpha,\beta})^2(0) = 0, \tag{4.23b}$$

$$\sin^2 \pi\beta + \lambda^2 \cos(2\pi\, s)(\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta})^2(0) = 0, \tag{4.23c}$$

$$\sin(2\pi\, s)(\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta})^2(0) = 0. \tag{4.23d}$$

განტოლებების (4.23b) და (4.23d) ამონახსნებია $s = 0, \pm 1/2$. მაშინ $\sin(2\pi\, s) = 0$ და ან $\cos(2\pi\, s) = 1$ (თუ $s = 0$) ან კიდევ $\cos(2\pi\, s) = -1$ (თუ $s = \pm 1/2$). პირველი მათგანი $s = 0$ არ წარმოადგენს განტოლებების (4.23a) და (4.23c) ამონახსნს, რადგან $\sin^2 \pi\beta > 0$. მაშასადამე ,

$$\sin^2 \pi\beta + \lambda^2 (\widetilde{\mathscr{A}}^0_{\alpha,\beta})^2(0,\lambda) \neq 0, \qquad \sin^2 \pi\beta + \lambda^2 (\widetilde{\mathscr{D}}^0_{\alpha,\beta})^2(0,\lambda) \neq 0.$$

თუ $s = \pm 1/2$ და $\lambda = 0$ განტოლებები (4.23a) და (4.23c) ღებულობენ შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned}
&\sin^2 \pi\beta - (\widetilde{\mathscr{A}}^{\pm 1/2}_{\alpha,\beta})^2(0,1) \\
&\quad := \sin^2 \pi\beta - \left\{\cot \pi\beta \cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) + (\pi - \alpha)\beta\right] + \frac{1}{\sin \pi\beta}\cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - \alpha\beta\right]\right\}^2 \\
&\quad = \frac{\sin^4 \pi\beta - \left\{\cos \pi\beta \cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) + (\pi - \alpha)\beta\right] + \cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - \alpha\beta\right]\right\}^2}{\sin^2 \pi\beta} = 0, \\
&\sin^2 \pi\beta - (\widetilde{\mathscr{D}}^{\pm 1/2}_{\alpha,\beta})^2(0,1) \\
&\quad := \sin^2 \pi\beta - \left\{\cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) + (\pi - \alpha)\beta\right] + \frac{1}{\sin \pi\beta}\cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - \alpha\beta\right]\right\}^2 \\
&\quad = \frac{\sin^4 \pi\beta - \left\{\sin \pi\beta \cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) + (\pi - \alpha)\beta\right] + \cos\left[\alpha\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - \alpha\beta\right]\right\}^2}{\sin^2 \pi\beta} = 0,
\end{aligned}$$

რომლებიც ემთხვევა (2.8) და (2.9) და მათ შეიძლება ჰქონდეთ არაუმეტესი ორი ამონახსნისა თითოეულს, ყოველი $0 < \beta < 1$.

განტოლებების (4.23b) და (4.23d) სხვა ამონახსნებია $\widetilde{\mathscr{A}}^s_{\alpha,\beta}(0) = 0$ და, შესაბამისად, $\widetilde{\mathscr{D}}^s_{\alpha,\beta}(0) = 0$. მაგრამ არ წარმოადგენენ (4.23a) და (4.23c) განტოლებების ამონახსნებს,

რადგან $\sin^2 \pi\beta > 0$. მაშასადამე,

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(0,\lambda) \neq 0 \qquad \text{ყველა} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 < \beta < 1 \quad \text{on} \quad \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_3}, \qquad (4.24)$$
$$-1 < s < 1, \quad s \neq \pm\frac{1}{2}$$

და ყველა $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, რომლებიც არ წარმოადგენენ (2.8) და (2.9) ტრანსცენდენტული განტოლებების ამონახსნებს.

ჩვენ გვექნება

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(0,\lambda) \neq 0 \qquad \text{ყველა} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 < \beta < 1 \quad \text{on} \quad \overline{\Gamma_2^{\pm}}. \qquad (4.25)$$

პირობებიდან (4.22), (4.24) და (4.25) გამომდინარეობს

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,\lambda) \neq 0 \qquad \text{ყველა} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < 1, \qquad (4.26)$$
$$-1 < s < 1, \quad s \neq \pm\frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \text{on} \quad \omega \in \mathfrak{R} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3.$$

პირობებიდან (4.12) და (4.26) გამომდინარეობს, რომ

$$\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,\lambda) \neq 0 \quad \text{ყველა} \quad \omega \in \mathfrak{R} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3, \qquad (4.27)$$
$$0 < \alpha < \pi, \quad -1 < s < 1, \quad s \neq \pm\frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta} = 0 \qquad \text{ყველა} \quad 0 < \alpha < \pi, \quad -1 < s < 1, \quad s \neq \pm\frac{1}{2}, \quad 0 < \beta < 1. \qquad (4.28)$$

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ რადგან $\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,\lambda) \neq 0$ ყველა $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < 1$, $-1 < s < 1, s \neq \pm\frac{1}{2}, \mathfrak{R} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, ინდექსები ემთხვევიან ერთმანეთს და არიან ნულის ტოლი

$$\operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta} = \operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\cdot,1) = \operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\cdot,\lambda) = \operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\cdot,0) = 0. \qquad (4.29)$$

მართლაც, ადვილად შემოწმებადია, რომ $\operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\cdot,0) = 0$, რადგან $\det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,0)$ არის მუდმივი $\mathfrak{R}$ მართკუთხედის ორ გვერდზე Γ_1 და Γ_3 და არგუმენტის ნაზრდებს $\arg\, \det \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\omega,0)$ მართკუთხედის Γ_2^- და Γ_2^+ გვერდებზე გააჩნიათ საწინააღმდეგო ნიშანი. მაშასადამე, $\operatorname{Ind} \mathscr{B}^s_{\alpha,\beta}(\cdot,0) = 0$ და ფორმულა (4.3) დამტკიცებულია.

თეორემების 3.9 და 2.2 და ფორმულების (2.22) და (2.23) საშუალებით დავასკვნით,რომ (2.36a)სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნის ერთადერთი წყვილი $\psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/p}(\mathbb{R}^+)$ $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1-1/p}_p(\mathbb{R}_\alpha)$ ყველა $1 < p < \infty$. ∎

თეორემის 2.1 დამტკიცება: თუ $0 < \alpha < \pi$ დამტკიცება წარმოადგენს თეორემა 2.3 და თეორემა 4.11 შედეგს.

თუ $\pi < \alpha < 2\pi$, სასაზღვრო ინტეგრალურ ოპერატორში B_α ოპერატორის განმარტებიდან

$$\mathrm{B}_\alpha = \begin{bmatrix} I & \boldsymbol{A}_\alpha \\ -\boldsymbol{A}_\alpha & I \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_\alpha = \frac{1}{4\pi}\left[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{-i\alpha}}\right].$$

α შეგვიძლია შევცვალოთ $\alpha_0 := 2\pi - \alpha \in (0, \pi)$, რადგან $\boldsymbol{K}^1_{e^{\pm i\alpha}} = \boldsymbol{K}^1_{e^{\mp i\alpha_0}}$. ■

Bibliography

[BCC12a] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel and P. Ciarlet, Jr., T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 46 (2012) 1363-1387.

[BCC12b] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel and X. Claeys, Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial, Published online: http://hal.inria.fr/hal-00651008/

[BCDN12] T. Buchukuri, O. Chkadua, R. Duduchava & D. Natroshvili, Interface crack problems for metallic-piezoelectric composite structures, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics bf 55, 2012, 1-150. Free access: http://www.rmi.ge/jeomj/memoirs/vol55/contents.htm

[BDKT13] T. Buchukuri, R. Duduchava, D. Kapanadze & M. Tsaava, Localization of a Helmholtz boundary value problem in a domain with piecewise-smooth boundary, Proc. A. Razmadze Math. Inst, 2013, to appear.

[CDS03] L.P. Castro, R. Duduchava, F.-O. Speck, Localization and minimal normalization of mixed boundary value problem. In Factorization, Singular Operators and Related Problems, Proceedings of the Conference in Honour of Professor Georgii Litvinchuk at Funchal, Portugal 2002 (Eds. S. Samko et alt.), Kluwer, Dordrecht 2003, 73-100.

[DD13] V. Didenko, R. Duduchava, Mellin convolution operators in Bessel potential spaces. Manuscript.

[Du13] R. Duduchava, Mellin convolution operators in the Bessel potential spaces. Manuscript.

[Es81] G. Eskin, Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations, vol. 52 of Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence 1981.

[Du01] R. Duduchava, The Green formula and layer potentials, Integral Equations and Operator Theory 41, 2, 2001, 127-178.

[DNS95] R. Duduchava, D. Natroshvili, E. Shargorodsky, Basic boundary value problems of thermoelasticity for anisotropic bodies with cuts. I-II, Georgian Mathematical Journal 2, 1995, 123-140, 259-276.

[Du79] R. Duduchava, Integral equations with fixed singularities. Teubner, Leipzig, 1979.

[Du84a] R. Duduchava, On multidimensional singular integral operators I-II, Journal of Operator Theory 11, 41-76, 1984, 199-214.

[Du84b] R.Duduchava, On general singular integral operators of the plane theory of elasticity, Rendiconti Sem. Mat. Univers. e Politecn. Torino 42, 15-41, 1984.

[Du86] R.Duduchava, General singular integral equations and basic theorems of the plane theory of elasticity, Trudi Tbiliskogo Mathematicheskogo Instituta Academii Nauk Gruzinskoi SSR 82, 45-89, 1986 (Russian).

[Du87] R. Duduchava, On algebras generated by convolutions and discontinuous functions, Integral Equations and Operator Theory 10, 505-530, 1987.

[Du82] R.Duduchava, An application of singular integral operators to some problems of elasticity, Integral Equations and Operator Theory 5, 475-489, 1982.

[ENS13a] T. Ehrhardt, A.P. Nolasco AND F.-O. Speck, A Riemannn surface approach for diffraction from rational wedges, Operators and Matrices (will appear in 2013).

[ENS13b] T. Ehrhardt, A.P. Nolasco AND F.-O. Speck, Boundary integral methods for wedge diffraction problems: the angle $2\pi/n$, Dirichlet and Neumann conditions Operators and Matrices (will appear in 2013).

[Tr95] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, 2-nd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg, 1995.