

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

პარამეტრული ჰიპოთეზები

და

სტატისტიკური დასკვნები ორამოკრეფიან ამოცანებში

მაია ბობოხიძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი : თსუ ასისტენტ-პროფესორი

ზაზა ხეჩინაშვილი

თბილისი-2013 წელი

შინაარსი

ანოტაცია	3
შესავალი.....	4
1. სტატისტიკური ჰიპოთეზები და მათი მაგალითები	
1.1 სტატისტიკური ჰიპოთეზის განმარტება.....	5
1.2. პრაქტიკაში ვაგრცელებული ჰიპოთეზები	5
2. პარამეტრული ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანის დასმა	
2.1. პირველი და მეორე გვარის შეცდომები.....	7
2.2. კრიტერიუმის არის აგება.....	7
2.3. ნეიმან-პირსონის ლემა	9
3. სტატისტიკური დასკვნები ორამოკრეფიან ამოცანებში	
3.1. ორამოკრეფიანი ამოცანა.....	9
3.2. ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების საშუალოებისათვის.....	10
3.3. მაგალითი	15
დასკვნა.....	17
გამოყენებული ლიტერატურა	18

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია პარამეტრული სტატისტიკური ჰიპოთეზების დასმის და გადაჭრის საკითხი. კერძოდ შესწავლილია ორამოკრეფიანი სქემები ნორმალურად განაწილებული პოპულაციებისათვის. რეალური მონაცემებისათვის ჩამოყალიბებულია სტატისტიკური ჰიპოთეზები და მიღებულია შესაბამისი გადაწყვეტილება.

Abstract

A question of formulating and solving parametric statistical hypothesis is considered. Specifically studied schemes for the two samples from a normal distributions. For real data the hypothesis about the difference between the means are studied and solved.

შესავალი

საბაკალავრო ნაშრომში წარმოდგენილია თემა "პარამეტრული ჰიპოთეზები და სტატისტიკური დასკვნები ორამოკრეფიან ამოცანებში". მასში განხილულია პარამეტრული სტატისტიკური ჰიპოთეზათა დასმის და გადაწყვეტის ამოცანა. თავდაპირველად ჩვენ ზოგადად ვაყალიბებთ ჰიპოთეზის არსს და მოგვყავს ზოგიერთი მათგანი. განვსაზღვრავთ საჭირო ცნებებს, როგორცაა კრიტიკული არე და მისი აგება, შესაბამისად განვმარტავთ პირველი და მეორე გვარის შეცდომებს, და მათ ალბათობებს, ანუ

პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა

$$P(H_0 | H_1) \equiv P\{X \in X_1 | \text{სამართლიანია } H_0\} \equiv P\{X \in X_1 | H_0\} \equiv P\{T_n \in U_1 | H_0\}$$

მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა

$$P(H_0 | H_1) \equiv P\{X \notin X_1 | \text{სამართლიანია } H_1\} \equiv P\{X \notin X_1 | H_1\} \equiv P\{T_n \notin U_1 | H_1\}$$

ასევე დავახასიათებთ კრიტერიუმის სიმძლავრეს და კრიტერიუმის მნიშვნელობის α დონეს. საბოლოოდ ჩამოყალიბებულ გადაწყვეტილების მიღების ალგორითმს გამოვიყენებთ ორამოკრეფიან სქემებში. კერძოდ კი ორი დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული პოპულაციების საშუალოთა ტოლობის ჰიპოთეზებისათვის. საზოგადოდ, როგორც ცნობილია ასეთი ჰიპოთეზებისათვის განიხილება სამი შემთხვევა:

პირველი შემთხვევა, ანუ როცა ადგილი აქვს დისპერსიების ტოლობას, სტატისტიკას აქვს შემდეგი

სახე:

$$Z \equiv Z_{n,m} = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \sim N(0,1) .$$

მეორე შემთხვევა, როცა დისპერსიები უცნობია მაგრამ ტოლი და სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე :

$$T_{n,m} = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{n,m} \sqrt{(1/n + 1/m)}} .$$

მესამე შემთხვევა, რომელიც სატერტვაიტის მეთოდითაა ცნობილი, ანუ როცა დისპერსიები უცნობია და განსხვავებული შემდეგი სტატისტიკით

$$T_{n_1, n_2} = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{\sqrt{S_{1n_1}^2 / n_1 + S_{2n_2}^2 / n_2}}$$

მიღებული დასკვნები გამოყენებულია კონკრეტული მაგალითისთვის. კერძოდ ჩვენ ერთმანეთს შევადარეთ ჩვენი ფაკულტეტის გოგონატა და ვაჟთა საშუალო ქულები, ე.წ. GPI.

§1. სტატისტიკი ჰიპოთეზები და ზოგიერთი ცნობილი ჰიპოთეზა.

სტატისტიკა ეს არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის სტატისტიკური მონაცემების სისტემატიზაციის, ანალიზისა და გამოყენების მეთოდებს თეორიული და პრაქტიკული დასკვნების მიღების მიზნით. მისი ძირითადი მიზანი არის ჩატარებული დაკვირვებების საფუძველზე სტატისტიკური დასკვნების მიღება შესასწავლი ექსპერიმენტის ალბათური მოდელის შესახებ. განვიხილოთ სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების მეთოდები.

1.1 X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს $L(X)$ განაწილების კანონთან ერთად უწოდებენ $L(X)$ კანონით განაწილებულ გენერალურ ერთობლიობას. ხოლო რაიმე მოსაზრებას გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონის ან მისი რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ სტატისტიკური ჰიპოთეზა ეწოდება. ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანა მდგომარეობს ისეთი წესის – სტატისტიკური კრიტერიუმის ჩამოყალიბებაში, რომელიც საშუალებას მოგვცემს რეალურად ჩატარებული დაკვირვების შედეგად მიღებული შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე შევამოწმოთ გამოთქმული მოსაზრების (ჰიპოთეზის) სამართლიანობა. ასეთი წესის შემუშავება და დასაბუთება, ოპტიმალურობის მოთხოვნის თვალსაზრისით წარმოადგენს სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების თეორიის საგანს.

სტატისტიკურ ჰიპოთეზას H სიმბოლოთი აღნიშნავენ და თავისი ბუნებით შეიძლება ეხებოდეს გენერალური ერთობლიობის განაწილების სახეს ან მის რაიმე თვისებას. ჰიპოთეზას ეწოდება მარტივი თუ ის ცალსახად განსაზღვრავს გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მას რთული ეწოდება.

1.2 პრაქტიკაში გავრცელებულია შემდეგი სტატისტიკური ჰიპოთეზები:

1. ჰიპოთეზა განაწილების კანონის შესახებ – ჩატარებული დაკვირვებების საფუძველზე შესამოწმებელია ჰიპოთეზათა გენერალური ერთობლიობის $L(X) = F$ განაწილების კანონის შესახებ:

ა) $H_0 : F(x) = F_0(x)$, სადაც $F_0(x)$ ცალსახად განსაზღვრული ცნობილი განაწილების ფუნქციაა

ბ) $H_0 : F \in F$, რაც ნიშნავს რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების F ფუნქცია განაწილებათა F ოჯახის წარმომადგენელია.

ხშირად განაწილების ფუნქციათა ოჯახი განისაზღვრება პარამეტრული სახით:

$$F = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}.$$

2. ერთგვაროვნების ჰიპოთეზა – ვთქვათ $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i=1, 2, \dots, k$ არის დამოუკიდებელ დაკვირვებათა k სერიაში მიღებული შერჩევები. შეიძლება თუ არა ჩავთვალოთ, რომ შერჩევები მიღებულია ერთი და იგივე შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად, ანუ არის თუ არა განაწილების კანონი ერთი და იგივე? უნდა შემოწმდეს შემდეგი სახის ჰიპოთეზა: $H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x)$

სადაც $F_i(x)$ i -ური სერიის განაწილების ფუნქცია.

3. დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა – ვთქვათ მოცემულია ორგანზომილებიანი (X, Y)

შემთხვევითი სიდიდე $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ დამოუკიდებელი დაკვირვებებით და უცნობი

$F(x, y)$ განაწილებით. არის თუ არა X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელი, ანუ ჰიპოთეზას აქვს შემდეგი სახე

$$H_0 : F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

სადაც $F_X(x)$ და $F_Y(y)$ შესაბამისად X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების ფუნქციებია.

4. შემთხვევითობის ჰიპოთეზა – ვთქვათ ექსპერიმენტის შედეგი აღიწერება n განზომილებიანი

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ რეალიზაციით. X ის განაწილების

ფუნქციაა $F_X(x)$. გასარკვევია $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის კომპონენტები

$X_i, i=1, 2, \dots, n$ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული სიდიდეებია თუ არა. ჰიპოთეზას აქვს

შემდეგი სახე: $H_0 : F_X(x) = F(x_1)F(x_2)\dots F(x_n)$.

5. პარამეტრული ჰიპოთეზები – დავუშვათ, რომ $X_1, X_2, \dots, X_n$ შერჩევაა გენერალური

ერთობლიობიდან, რომლის განაწილების კანონია $L(X)$, ამასთან ცნობილია, რომ $L(X) \in F$, სადაც $F =$

$\{F(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ წარმოადგენს განაწილების ფუნქციათა რაიმე პარამეტრულ ოჯახს, Θ –

პარამეტრული სიმრავლეა. ამრიგად ჩვენ ვუშვებთ, რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების

ფუნქციის ფორმა ცნობილია, მაგრამ განაწილება შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს. ამ შემთხვევაში

ჰიპოთეზები ფაქტიურად ეხება განაწილების უცნობ პარამეტრს და მათ პარამეტრულ ჰიპოთეზებს

უწოდებენ.

§2. პარამეტრული ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანის დასმა.

2.1 როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ პარამეტრული ჰიპოთეზების შემთხვევაში ცნობილია გენერალური ერთობლიობის განაწილების ფუნქციის ფორმა, მაგრამ შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს. პარამეტრული ჰიპოთეზის მაგალითებია:

$H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta \leq \theta_0, H_2: \theta > \theta_0$, სადაც θ_0 წარმოადგენს რაიმე ცნობილ რიცხვს. საზოგადოდ, პარამეტრული H_0 ჰიპოთეზა მოიცემა Θ -ს გარკვეული Θ_0 ქვესიმრავლის დაფიქსირებით, $H_0: \theta \in \Theta_0$. ასევე, განიხილავენ ალტერნატიულ (საწინააღმდეგო) H_1 ჰიპოთეზას $H_1: \theta \notin \Theta_0$ და გენერალური ერთობლიობიდან ამოღებული $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ შერჩევის საფუძველზე მოწმდება, თუ რომელი ჰიპოთეზაა სამართლიანი.

იმისათვის, რომ გადავწყვიტოთ თუ რომელი ჰიპოთეზაა სამართლიანი, უნდა აიგოს კრიტერიუმი, რაც იმას გულისხმობს, რომ x -ის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე უნდა გაიყოს ორ, თანაუკვეთ X_0 და X_1 არედ. X_0 ეს არის იმ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს, ხოლო X_1 პირიქით. სწორი ჰიპოთეზის შერჩევის ასეთი წესის გამო X_0 სიმრავლეს H_0 ჰიპოთეზის მიღების არეს, ხოლო X_1 სიმრავლეს H_1 ჰიპოთეზის უარყოფას ანუ კრიტიკულ არეს უწოდებენ.

კრიტიკული არის ასაგებად ზემოთ მოყვანილი წესის გამოყენებისას შეიძლება დავიშვათ ორი სახის შეცდომა.

1. პირველი გვარის შეცდომა: უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა, როცა ის სამართლიანია.
2. მეორე გვარის შეცდომა: არ უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა, როცა ის სამართლიანი არ არის.

2.2 მოვიყვანოთ კრიტიკული არის აგების ერთ-ერთი შესაძლო ვარიანტი.

განიხილავენ სპეციალურად შერჩეულ $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ სტატისტიკას მნიშვნელობებით R^1 -ში და განსაზღვრავენ კრიტიკულ $U \subset R^1$ არეს. მოცემული $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლისთვის თუ $t_n = T_n(x) \in U_1$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარყოფთ, ანუ H_1 ჰიპოთეზა სამართლიანია. ხოლო $t_n = T_n(x) \in R^1 \setminus U_1$ პირობის შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზაა სამართლიანი. ცხადია, რომ $\{X \in X_1\}$ და $\{T_n \in U_1\}$ ექვივალენტური ხდომილობებია. $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ სტატისტიკას კრიტერიუმის სტატისტიკა ეწოდება.

იგი უნდა იყოს მარტივად გამოსათვლელი, უნდა ვიცოდეთ მისი ზუსტი ან ზღვარითი განაწილება. აგებულ კრიტერიუმის არეებს ზოგადად შემდეგი სახე აქვს:

$$ა) X_1 = \{x : T_n(x) \geq c\} \quad ბ) X_1 = \{x : T_n(x) \leq c\} \quad გ) X_1 = \{x : |T_n(x)| \geq c\}$$

შეგვიძლია გამოვიყენოთ პირველი და მეორე გვარის შეცდომებისთვის შემოკლებული აღნიშვნები..

✓ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა

$$P(H_0 | H_1) \equiv P\{X \in X_1 | \text{სამართლიანია } H_0\} \equiv P\{X \in X_1 | H_0\} \equiv P\{T_n \in U_1 | H_0\}$$

✓ მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა

$$P(H_0 | H_1) \equiv P\{X \notin X_1 | \text{სამართლიანია } H_1\} \equiv P\{X \notin X_1 | H_1\} \equiv P\{T_n \notin U_1 | H_1\}$$

H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის ალბათობა, როცა სამართლიანია H_1 ალტერნატივა, ანუ

$$1 - P(H_0 | H_1) \equiv P\{X \in X_1 | H_1\} \equiv P\{T_n \in U_1 | H_1\}$$

სიდიდეს $X_1(T_n)$ კრიტერიუმის სიმძლავრეს უწოდებენ.

შეუძლებელია კრიტერიუმის არის ისეთი შერჩევა, რომ პირველი და მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა ერთდროულად იყოს მცირე. საჭიროა მოიძებნოს გარკვეული კომპრომისი. რადგან პირველი გვარის შეცდომა უფრო სერიოზულადაა მიჩნეული ვიდრე მეორე, ამიტომ, აფიქსირებენ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობის რაიმე α დონეს, რაც იმას ნიშნავს რომ განიხილავენ ისეთ $X_1(U_1)$ კრიტიკულ არეებს, რომელთათვისაც

$$P(X \in X_1 | H_0) \equiv P\{T_n \in U_1 | H_0\} \leq \alpha$$

და არჩევენ ისეთ კრიტიკულ არეს, რომლის სიმძლავრე მაქსიმალურია. α დონის შერჩევა ხშირად ამოცანის შინაარსზეა დამოკიდებული. α რიცხვს კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე ეწოდება.

საბოლოოდ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება დაიყოს შემდეგ ეტაპებად

1. H_0 და H_1 ჰიპოთეზების ჩამოყალიბება
2. კრიტერიუმის T_n სტატისტიკის შერჩევა
3. მნიშვნელობის α დონის მითითება და U_1 კრიტიკული არის დადგენა.
4. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ შერჩევის საფუძველზე კრიტერიუმის სტატისტიკის $t_n = T_n(x)$ რიცხვითი მნიშვნელობის დადგენა.
5. სამართლიანი ჰიპოთეზის არჩევა: თუ $t_n \in U_1$, მაშინ უარვყოფთ H_0 ჰიპოთეზას და ვირჩევთ H_1 -ს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ვირჩევთ H_0 .

შედეგი მნიშვნელოვანია როცა H_0 ჰიპოთეზა უარყოფილია. ანუ α მნიშვნელობის დონით სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა.

2.3. ნეიმან-პირსონის ლემა. ვთქვათ H_0 ჰიპოთეზასა და H_1 ალტერნატივის მიხედვით, ჰიპოთეტური განაწილების სიმკვრივეებია შესაბამისად $f_0(x)$ და $f_1(x)$, ამასთან ყოველი x -ისათვის $f_0(x) > 0, f_1(x) > 0$. ყოველი ფიქსირებული $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ რეალიზაციისათვის განვიხილოთ დასაჯერობის ფარდობა:

$$l_n(x) \equiv l_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}$$

შემოვიღოთ სტატისტიკა $l_n(x) = l_n(X) = l_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ და განვსაზღვროთ $\psi(c) = P_0\{l_n \geq c\}$, სადაც $\Psi(c)$ არის $\{l_n \geq c\}$ ხდომილობის ალბათობა ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში. დავუშვათ, რომ ყოველი α -თვის, $0 < \alpha < 1$ არსებობს ისეთი c_α , რომ $\psi(c_\alpha) = \alpha$.

ნეიმან-პირსონის ლემა: მიღებულ დაშვებებში არსებობს H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების (H_1 ალტერნატივის წინააღმდეგ) α მნიშვნელობის დონის მქონე უმძლავრესი კრიტერიუმი. ეს კრიტერიუმი განისაზღვრება შემდეგი კრიტიკული აზრით:

$$X_{1,\alpha}^* = \{x : l_n(x) \geq c_\alpha\}$$

აგებულ კრიტერიუმს ეწოდება ნეიმან-პირსონის კრიტერიუმი.

§ 3. სტატისტიკური დასკვნები ორამოკრეფიან ამოცანებში.

3.1. ორი პოპულაციის შედარება სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა თეორიის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა. მისი მახასიათებლების შედარების ამოცანა ჩნდება ე.წ. კონტროლირებად ექსპერიმენტებში, როდესაც შეისწავლება რაიმე ახალი ტექნოლოგიის, მედიკამენტის თუ სხვა ფაქტორის ზემოქმედების ეფექტურობის საკითხი. იგი ეფუძნება ორ შერჩევას. ერთი შერჩევა აღებულია X პოპულაციიდან, მეორე კი Y პოპულაციიდან. რა თქმა უნდა ორივე პოპულაციას გააჩნია რიცხვითი მახასიათებლები. დავუშვათ $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ და $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ შესაბამისად n და m მოცულობის შერჩევებია ორი დამოუკიდებელი $L(X), L(Y) \in \mathbf{F}$, $F = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$. კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობებიდან. θ_1 და θ_2 ით აღვნიშნოთ პოპულაციათა დამახასიათებელი θ პარამეტრის ჰემმარიტი უცნობი რიცხვითი მნიშვნელობები. ვთქვათ ამ პოპულაციებიდან ამოღებული შერჩევითი მნიშვნელობებია $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $y_1, y_2, \dots, y_n$. მიუხედავად იმისა θ_1 და θ_2 პარამეტრები ტოლია თუ არა, ამ ორი

შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილი უცნობი θ პარამეტრის შეფასება მოგვცემს განსხვავებულ რიცხვით მნიშვნელობებს. ისმის შემდეგი კითხვა: $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $y_1, y_2, \dots, y_n$ მნიშვნელობებისათვის შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ არსებობს მნიშვნელოვანი განსხვავება დამოუკიდებელ პოპულაციათა აღნიშნულ პარამეტრებს შორის.

3.2. ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების საშუალოებისათვის.

ვთქვათ $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ და $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ და $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ კანონით განწილებული გენერალური ერთობლიობებიდან. ჩვენი ამოცანაა აღნიშნული პოპულაციებიდან ამოღებული $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $y_1, y_2, \dots, y_n$ შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე შევამოწმოთ შემდეგი სახის ჰიპოთეზები:

$$ა) H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$ბ) H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$გ) H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

უნდა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. ორივე პოპულაციის დისპერსიები σ_1^2 და σ_2^2 ცნობილია.

2. ორივე პოპულაციის დისპერსიები უცნობია მაგრამ ტოლია $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

3. ორივე პოპულაციის დისპერსიები უცნობია σ_1^2 და σ_2^2 .

- ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების საშუალოსთვის ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში.

პოპულაციების დამოუკიდებლობის გამო მარტივად მიიღება, რომ

$$Z_{n,m} \equiv \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - E(\bar{X}_n - \bar{Y}_m)}{\sqrt{D(\bar{X}_n - \bar{Y}_m)}} = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n - \sigma_2^2 / m}} \quad 3.1$$

სტატისტიკას აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება.

კერძოდ, ნულოვანი ჰიპოთეზის შემთხვევაში, ე.ი. როცა $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$Z \equiv Z_{n,m} = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} \sim N(0,1) \quad 3.2$$

სამივე შემთხვევაში ტესტის სტატისტიკას წარმოადგენს 3.2 ფორმულით მოცემული $Z_{n,m}$ სტატისტიკა. განსხვავებულია მხოლოდ კრიტიკული არეები. ალტერნატივების მიხედვით, α მნიშვნელობის დონით კრიტიკული არეები შემდეგ ფორმისაა:

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ზედა არე, $U_1 = [z_{\alpha/2}, +\infty)$,

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ქვედა არე, $U_1 = (-\infty, -z_\alpha]$

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისგან: სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა და $\alpha/2$ ზომის ქვედა არეებისგან, $U_1 = (-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, +\infty)$

აღვნიშნოთ, რომ z_α სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α -კრიტიკული წერტილია ჰიპოთეზა შემოწმების ალგორითმი ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა სხვაობისათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსიები ცნობილია:

$$\text{ჰიპოთეზა} \quad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\text{მნიშვნელოვნობის დონე} \quad \alpha$$

$$\text{კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა} \quad z = \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}$$

$$\text{ალტერნატიული ჰიპოთეზები} \quad \text{კრიტიკული არე } U_1$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad z \geq z_\alpha$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad z \leq -z_\alpha$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad z \geq z_{\alpha/2} \text{ ან } z \leq -z_{\alpha/2}$$

P მნიშვნელობა განიმარტება როგორც მნიშვნელობის ის მინიმალური დონე, როდესაც ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა. თუ z არის $Z_{n,m}$ სტატისტიკის დაკვირვებული სიდიდე, მაშინ

P მნიშვნელობა $= 1 - \Phi(z)$ ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივისთვის

P მნიშვნელობა $= \Phi(z)$ ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივისთვის

P მნიშვნელობა $= 2[1 - \Phi(|z|)]$ ორმხრივი ალტერნატივისთვის.

თუ P მნიშვნელობა $\leq \alpha \Rightarrow H_0$ -ს უარყოფთ α დონით.

თუ P მნიშვნელობა $> \alpha \Rightarrow H_0$ -ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

- ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის უცნობი მაგრამ ტოლი დისპერსიების შემთხვევაში.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიები უცნობია მაგრამ ტოლი. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. საერთო დისპერსიის უცნობი მნიშვნელობა შევაფასოთ ორივე შერჩევის საფუძველზე ფორმულით:

$$S_{n,m}^2 = \frac{1}{n+m-2} \left((n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2 \right) = \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right)$$

მაშინ, როგორც ვიცით $(n+m-2) \frac{S_{n,m}^2}{\sigma^2}$ სტატისტიკას აქვს $\chi^2(n+m-2)$ განაწილება, ხოლო

$$T_{n,m} = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{n,m} \sqrt{(1/n + 1/m)}}$$

სტატისტიკას - სტიუდენტის განაწილება $(n+m-2)$ თავისუფლების ხარისხით.

ვიცით რა $T_{n,m}$ სტატისტიკის განაწილება, მარტივად სტანდარტული გზით მოწმდება ზემოთ მოყვანილი ჰიპოთეზები უცნობი გენერალური საშუალოებისათვის.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობიდან ვიღებთ, რომ

$$T_{n,m} = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m)}{S_{n,m} \sqrt{(1/n + 1/m)}} \sim t(n+m-2)$$

და α მნიშვნელობის დონის კრიტიკული არეები ალტერნატივების მიხედვით შემდეგნაირად აიგება:

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა $(n+m-2)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე t განაწილების მქონე α ზომის ზედა არე. $U_1 = [t_{n+m-2, \alpha}, +\infty)$.

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა $(n+m-2)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე t განაწილების მქონე α ზომის ქვედა არე, $U_1 = (-\infty, -t_{n+m-2, \alpha}]$

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისგან: $(n+m-2)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე t განაწილების მქონე $\alpha/2$ ზომის ზედა და $\alpha/2$ ზომის ქვედა არეებისგან, $U_1 = (-\infty, -t_{n+m-2, \alpha/2}] \cup [t_{n+m-2, \alpha/2}, +\infty)$.

იგულისხმება რომ $t_{v, \alpha}$ წარმოადგენს v თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების α მნიშვნელობის დონის კრიტიკულ წერტილს. ამრიგად გადაწყვეტილების წესი შემდეგია:

ყველა ისეთი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც

$$t_{n,m} = \frac{(\bar{x}_n - \bar{y}_m)}{s_{n,m} \sqrt{(1/n + 1/m)}} \in U_1$$

H_0 ჰიპოთეზას უარყოფთ α მნიშვნელობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

- .ორამოკრეფიანი t - კრიტერიუმი არატოლი დისპერსიების შემთხვევაში.

ვთქვათ მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული პოპულაცია საშუალოებით μ_1 და μ_2 , და ცნობილია რომ მათ აქვთ არატოლი დისპერსიები $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, ჩვენი ამოცანაა შევამოწმოთ $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ჰიპოთეზა $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. ცნობილია რომ

$$\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} \cong N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

სადაც n_1 და n_2 შესაბამისად პირველი და მეორე შერჩევის მოცულობებია.

აქედან გამომდინარე თუ ცნობილია σ_1 და σ_2 მაშინ H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში

$$\frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \cong N(0,1)$$

ამიტომ თუ ცნობილია σ_1 და σ_2 , მაშინ ეს შემთხვევითი სიდიდე გამოდგება კრიტერიუმის სტატისტიკად, მაგრამ თუ უცნობია σ_1 და σ_2 , მაშინ ეს სიდიდე არ გამოგვადგება. ამ შემთხვევაში გამოსახულებაში უცნობი პარამეტრების მაგივრად ჩავსვათ მათი შეფასებები (შესაბამისი სტანდარტული გადახრები) და კრიტერიუმის სტატისტიკა იყოს შემდეგი სიდიდე

$$T_{n_1, n_2} = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{\sqrt{S_{1n_1}^2/n_1 + S_{2n_2}^2/n_2}}$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა არ უნდა იყოს მხოლოდ გამოთვლადი. კრიტერიუმის ასაგებად არსებითია მისი ზუსტი ან ასიმპტოტური ანაწილების ცოდნა. ანუ ცვქვენ გვანტერესებს თუ როგორაა განაწილებული T_{n_1, n_2} სიდიდე. ეს პრობლემა ცნობილია ბერნეს-ფიშერის პრობლემის სახელით ხოლო მისი გადაჩრის ერთ ერთი შედარებით მარტივი გზა არის სატერტვაიტის მეთოდი. ის ყალიბდება შემდეგნაირად:

თუ მოცემულია α მნიშვნელობის დონისათვის T_{n_1, n_2} სტატისტიკა. დაკვირვებული მნიშვნელობა t_{n_1, n_2} აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას: $= t_{[c], \alpha/2} \leq t_{n_1, n_2} \leq t_{[c], \alpha/2}$.

სადაც $[c]$ აღნიშნავს c რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო c გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$c = \frac{(s_{1n_1}^2/n_1 + s_{2n_2}^2/n_2)^2}{(s_{1n_1}^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_{2n_2}^2/n_2)^2/(n_2-1)}.$$

მაშინ α მნიშვნელობის დონით $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მას უარყოფთ.

3.3. სტატისტიკურ დასკვნებს ორამოკრეფიან ამოცანებში ფართო გამოყენება აქვს. მოვიყვანოთ ერთი საინტერესო მაგალითი, სადაც ზმით განხილულ დასკვნებს გამოვიყენებთ. კერძოდ ჩვენ გვინტერესებს შევადაროთ ჩვენი ფაკულტეტის სტუდენტ გოგონათა და ვაჟთა საშუალო ქულები, ანუ GPI. ჩავატარე გამოკითხვა და დავაფიქსირე შემთხვევით შერჩეული 21 გოგონას და 18 ბიჭის GPI. ორივე პოპულაცია განაწილებულია ნორმალურად შესაბამისად $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ და $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. გვინდა შევამოწმოთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ რომ მათი საშუალოები ერთმანეთის ტოლია.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, და აქვე გვაქვს $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ალტერნატივა. თუმცა მანამდე საინტერესოა შევადაროთ მათი დისპერსიები, რათა დავადგინოთ თუ რომელი ხერხი გამოვიყენოთ. ჰიპოთეზები შევამოწმოთ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელობის დონით.

მონაცემები:

გოგონათა: 2,37; 1,03; 3,69; 1,42; 1,17; 2,89; 3,45; 0,87; 3,24; 2,16; 2,69; 1,1; 2,86; 3,13; 1,07; 1,85; 3,81; 0,91, 1,67; 1,86; 2,54: რაოდენობა 21.

ვაჟთა: 3,34; 1,1; 2,04; 0,77; 1,36; 1,21; 2,17; 2,65; 3,71; 2,78; 1,97; 0,94; 3,21; 1,18; 1,03; 1,42; 2,13; 3,73 რაოდენობა 18.

ჯერ შევამოწმოთ ჰიპოთეზა დისპერსიების ტოლობის შესახებ შესაბამისი ალტერნატიული ჰიპოთეზით.

$H_0 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$; $H_1 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq 1$; როგორც ცნობილია სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = F(n-1; m-1)$$

+სადაც $S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ და $S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$. $n = 21$ $m = 18$.

თუ ჩავსვამთ მონაცემებს, მოვიღებთ რომ :

$$S_1^2 = \frac{1}{21-1} \sum_{i=1}^{21} (X_i - 2.18)^2 = 0.8788 \text{ და } S_2^2 = \frac{1}{18-1} \sum_{i=1}^{18} (Y_i - 2.04)^2 = 0.9713. \quad (\bar{X} = 2.18 \quad \bar{Y} = 2.04)$$

$$H_0 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 \quad \text{ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში მივიღებთ რომ } F = \frac{0.8788}{0.9713} \approx 0.905.$$

მეორეს მხრივ

$$F_{0.025}(n-1; m-1) = F_{0.025}(20, 17) = 2.61 \quad F_{1-0.025}(20, 17) = \frac{1}{F_{0.025}(17, 20)} = \frac{1}{2.57} = 0.39$$

რადგან $0.39 < 0.905 < 2.61$, $H_0: \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$ ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს. გამოდის

რომ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ და ვიყენებთ ჰიპოთეზების შემოწმებას ორამოკრეფიან ამოცანებში ნორმალური პოპულაციების საშუალოებისათვის უცნობი, მაგრამ ტოლი დისპერსიების შემთხვევაში.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ ჰიპოთეზებისათვის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$T_{n,m} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right]}} \cong t(n+m-2)$$

თუ ჩავსვამთ მონაცემებს მივიღებთ:

$$T_{n,m} = \frac{2.18 - 2.04}{\sqrt{\frac{(21-1)0.8788 + (18-1)0.9703}{21+18-2} \left[\frac{1}{21} + \frac{1}{18} \right]}} \approx 0.45$$

მეორეს მხრივ თუ ვიგულისხმებთ რომ $\alpha = 0.05$, მაშინ

$$t_{0.025}(21+18-2) = t_{0.025}(37) = 2.028 \quad \text{და} \quad t_{1-0.025}(37) = -t_{0.025}(37) = -2.028$$

რადგან $-2.028 < 0.45 < 2.028$, $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ჰიპოთეზა სწორია და შეგვიძლია ვთქვათ რომ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელობის დონით გოგონათა და ვაჟთა საშუალო ქულები ერთმანეთის ტოლია.

დასკვნა

ჩვენ განვიხილეთ პარამეტრული სტატისტიკური ჰიპოთეზები და დაწვრილებით შევისწავლეთ ორამოკრეფიანი სქემები ნორმალურად განაწილებული პოპულაციებისათვის, განვიხილეთ სამი შემთხვევა. მიღებული დასკვნები კი გამოვიყენეთ კონკრეტული მაგალითისათვის. კერძოდ, გვაინტერესებდა ჩვენს უნივერსიტეტში გოგონათა და ვაჟთა საშუალო ქულები. გამოვთქვით ვარაუდი მათი საშუალოების ტოლობის შესახებ, გავარკვიეთ თუ რომელი შემთხვევა გვესაჭიროებოდა და შევამოწმეთ იგი ზემოთ ჩამოყალიბებული მეთოდის საშუალებით. ჩვენი ჰიპოთეზა სწორი აღმოჩნდა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Гаральд Крамер. Математические методы статистики. Москва. 1948.
2. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Математическая статистика. Москва, «Высшая школа». 1984.
3. ო.ფურთუხია. აღწერითი სტატისტიკა, ალბათობა, სტატისტიკური დასკვნების თეორია. თბილისი, 2008.