

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი, მათემატიკის მიმართულება

სამაგისტრო ნაშრომი

ჯგუფების არააბელური ტენზორული ნამრავლი

შემსრულებელი: გიორგი არაბიძე

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი ნ. ინასარიძე

თბილისი, 2013 წელი

შესავალი

თემის აქტუალობა: ჯგუფების კლასიკური ტენზორული ნამრავლი და კლასიკური ჰომოლოგიები წარმოადგენენ ჰომოლოგიური ალგებრის საფუძველს. მათ ფართო გამოყენებები აქვთ მათემატიკის ისეთ მნიშვნელოვან დარგებში როგორებიც არიან: ალგებრა, ალგებრული ტოპოლოგია, ალგებრული გეომეტრია. რ. ბრაუნმა და ჟ.-ლ. ლოდემ ტოპოლოგიური მოთხოვნილებებიდან გამომდინარე შემოიტანეს ჯგუფების არააბელური ტენზორული ნამრავლი. ნაშრომში მოყვანილი ზოგიერთი დებულება ანზოგადებს ბრაუნისა და ლოდეს მიერ შემოტანილი ტენზორული ნამრავლისათვის მიღებულ შედეგებს, რაც, ჩვენი აზრით, მნიშვნელოვანია ალგებრის ისეთი თანამედროვე დარგისათვის როგორიცაა არააბელური ჰომოლოგიური ალგებრა.

თემის მიზანია ბრაუნისა და ლოდეს მიერ შემოტანილ არააბელური ტენზორული ნამრავლის განმარტებაში მიღებული შეთანხმების განზოგადება, ჯგუფების მოქმედებებზე დადებული შეთანხმებულობის პირობის ზოგიერთ შემთხვევაში ნაწილობრივ, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში - მთლიანად მოხსნა.

კვლევის ობიექტს წარმოადგენს ჯგუფების არააბელური ტენზორული ნამრავლი.

ნაშრომის მეცნიერული ღირებულება: ნაშრომში განზოგადებულია გ. ელისისა და ფ. ლეონარდის მიერ მიღებული შედეგი, მოქმედებებზე დადებული შეთანხმებულობის პირობის ნაწილობრივ მოხსნით. ასევე ნაპოვნია იზომორფიზმი ჯგუფების არააბელურ ტენზორულ ნამრავლსა და ამ ჯგუფების თავისუფალი ნამრავლის ქვეჯგუფის ფაქტორჯგუფში. მნიშვნელოვანია, რომ არ არის მოთხოვნილი ჯგუფების მოქმედებების შეთანხმებულობის პირობა, რაც საშვალეხას გვაძლევს გამოვთვალოთ არააბელური ტენზორული ნამრავლი ჯგუფების ნებისმიერი მოქმედების შემთხვევაშიც.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა: სამაგისტრო ნაშრომი შედგება შესავლისა და ორი თავისგან. ნაშრომის საელტო მოცულობაა ჩვიდმეტი გვერდი. ლიტერატურის სია შეიცავს რვა დასახელებას.

1. არააბელური ტენზორული ნამრავლი.

მოვიყვანოთ რ. ბრაუნისა და ჟ.-ლ. ლოდეს მიერ [2]-ში შემოტანილი G და H ჯგუფების $G \otimes H$ არააბელური ტენზორული ნამრავლის განმარტება. ავტორები გულისხმობენ, რომ G და H ჯგუფები მოქმედებენ საკუთარ თავზე შეუღლებით, (${}^g g' = g g' g^{-1}$) ერთმანეთზე - შეთანხმებულად. G ჯგუფის მოქმედება H ჯგუფზე და H ჯგუფის მოქმედება G ჯგუფზე არის შეთანხმებული თუ ნებისმიერი $g, g' \in G$ და $h, h' \in H$ ელემენტებისთვის სრულდება შემდეგი ორი ტოლობა:

$$({}^g h) g' = g h g^{-1} g' \quad \text{და} \quad ({}^h g) h' = h g h^{-1} h' \quad (1.1)$$

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ G და H ჯგუფებია, რომლებიც მოქმედებენ თავის თავზე შეუღლებით, ხოლო ერთმანეთზე - შეთანხმებულად. G და H ჯგუფების არააბელური ტენზორული ნამრავლი $G \otimes H$ არის $g \otimes h$ სიმბოლოებით წარმოქმნილი ჯგუფი, სადაც $g \in G$ და $h \in H$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ორი თანაფარდობით:

$$g g' \otimes h = ({}^g g' \otimes {}^g h)(g \otimes h) \quad (1.2)$$

$$g \otimes h h' = (g \otimes h)({}^h g \otimes {}^h h') \quad (1.3)$$

$$\forall g, g' \in G \quad \forall h, h' \in H.$$

თავიდანვე ჩნდება კითხვა: როგორი იქნება არააბელური ტენზორული ნამრავლი მაშინ როდესაც ორივე მოქმედება არის ტრივიალური? პასუხი არის შემდეგი:

წინადადება 1.1: ჯგუფების არააბელური ტენზორული ნამრავლი იზომორფულია ამ ჯგუფების აბელიზატორების ჩვეულებრივი ტენზორული ნამრავლისა:

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_Z H^{ab}$$

დამტკიცება: თუ გავითვალისწინებთ, რომ ორივე მოქმედება ტრივიალურია, მაშინ ნებისმიერი ელემენტებისთვის, $g, g' \in G$ და $h, h' \in H$, მივიღებთ შემდეგს:

$$(gg' \otimes hh') = (g \otimes hh')(g' \otimes hh') = (g \otimes h)(g \otimes h')(g' \otimes h)(g' \otimes h')$$

მეორენაირი გაშლით გვექნება:

$$(gg' \otimes hh') = (gg' \otimes h)(g' \otimes h') = (g \otimes h)(g' \otimes h)(g \otimes h')(g' \otimes h')$$

ანუ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$(g \otimes h)(g \otimes h')(g' \otimes h)(g' \otimes h') = (g \otimes h)(g' \otimes h)(g \otimes h')(g' \otimes h')$$

უკანასკნელ ტოლობაში პირველი და ბოლო თანამამრავლების შეკვეცით მივიღებთ შემდეგს:

$$(g \otimes h')(g' \otimes h) = (g' \otimes h)(g \otimes h') \quad \forall \quad g, g' \in G, \quad h, h' \in H$$

ეს ტოლობა გვეუბნება, რომ როცა ორივე მოქმედება ტრივიალურია, მაშინ არააბელური ტენზორული ნამრავლი არის აბელური. რაზე დაყრდნობითაც ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი:

$$(gg'g^{-1}g'^{-1} \otimes h) = (gg' \otimes h)(g^{-1} \otimes h)(g'^{-1} \otimes h) = (gg' \otimes h)(g'^{-1} \otimes h)(g^{-1} \otimes h) = (1_G \otimes h)$$

ანალოგიურად დავასკვნით, რომ $(g \otimes h h' h^{-1} h'^{-1}) = (g \otimes 1_H) \quad \forall g, g' \in G. \quad h, h' \in H.$

მიღებული ტოლობები საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ბუნებრივი იზომორფიზმი $G \otimes H$ - სა და $G^{ab} \otimes H^{ab}$ - ს შორის... ანუ ისინი ამტკიცებენ წინადადება 1.1-ს.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ტოლობა, რომელიც სრულდება G და H ჯგუფების არააბელურ ტენზორულ ნამრავლში:

წინადადება 1.2 ყოველი $g, g' \in G. \quad h, h' \in H$ ელემენტებისთვის $G \otimes H$ - ში სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$(1 \otimes h) = (g \otimes 1) = 1_{\otimes} \quad (1.4)$$

$$(g \otimes h)^{-1} = ({}^g g^{-1} \otimes {}^g h) = ({}^h g \otimes {}^h h^{-1}) \quad (1.5)$$

$$(g \otimes h)(g' \otimes h')(g \otimes h)^{-1} = ({}^{[gh]} g' \otimes {}^{[g,h]} h') \quad (1.6)$$

$$(g {}^h g^{-1} \otimes h') = (g \otimes h)({}^{h'} g \otimes {}^{h'} h)^{-1} \quad (1.7)$$

$$(g' \otimes {}^g h h^{-1}) = ({}^{g'} g \otimes {}^{g'} h)(g \otimes h)^{-1} \quad (1.8)$$

$$[(g \otimes h), (g' \otimes h')] = (g {}^h g^{-1} \otimes {}^{g'} h' h'^{-1}) \quad (1.9)$$

დამტკიცება:

თუ (2)-ში ჩავსვავთ $g = 1$, ხოლო (3)-ში $-h = 1$ მივიღებთ (1.4)-ს.

თუ (2)-ში ჩავსვავთ $g' = g^{-1}$, ხოლო (3)-ში $-h' = h^{-1}$ მივიღებთ (1.5)-ს.

განვიხილოთ $(gg' \otimes hh')$.

ერთი მხრივ:

$$(gg' \otimes hh') = ({}^g g' \otimes {}^g h {}^g h')(g \otimes hh') = ({}^g g' \otimes {}^g h)({}^{ghg} g' \otimes {}^{ghg} h')(g \otimes h)({}^h g \otimes {}^h h')$$

მეორე მხრივ:

$$(gg' \otimes hh') = (gg' \otimes h)({}^h g {}^h g' \otimes {}^h h') = ({}^g g' \otimes {}^g h)(g \otimes h)({}^{hgh} g' \otimes {}^{hgh} h')({}^h g \otimes {}^h h')$$

ცხადია ეს ელემენტები ტოლია. მათ პირველი და მეოთხე თანამამრავლები ერთი და იგივე აქვთ, ამიტომ შუა ორი თანამამრავლის ნამრავლები ერთმანეთს უდრიან... გავითვალისწინოთ შეთანხმებულობის პირობა (1.1) და ჩვენ მივიღებთ:

$$({}^{gh} g' \otimes {}^{gh} h')(g \otimes h) = (g \otimes h)({}^{hg} g' \otimes {}^{hg} h')$$

ვთქვათ $g' = g^{-1}h^{-1}g$ და $h' = g^{-1}h^{-1}h$. შევიტანოთ ზედა ტოლობაში და ჩვენ მივიღებთ (1.6)-ს

(1.7)-ის დამტკიცებისთვის დაგვჭირდება შეთანხმებულობის პირობა და შემდეგი ტოლობა, რომელიც მიიღება (1.5)-სგან: $({}^{gh} g^{-1} \otimes {}^{gh} h^{-1}) = (g \otimes h)$

$$\begin{aligned} (g {}^h g^{-1} \otimes h') &= ({}^{gh} g^{-1} \otimes {}^g h') (g \otimes h') = ({}^{gh} g^{-1} \otimes {}^{gh} (h^{-1} h' h)) (g \otimes h') = \\ &= ({}^{gh} g^{-1} \otimes {}^{gh} h^{-1}) ({}^{ghh^{-1}h^{-1}g^{-1}gh} g^{-1} \otimes {}^{ghh^{-1}h^{-1}g^{-1}gh} (h' h)) (g \otimes h') = \\ &= (g \otimes h) ({}^g g^{-1} \otimes {}^g h' {}^g h) (g \otimes h') = (g \otimes h) ({}^g g^{-1} \otimes {}^g h') ({}^{gh'} g^{-1} \otimes {}^{gh'} h) (g \otimes h') = \\ &= (g \otimes h) (g \otimes h')^{-1} ({}^{gh'} g^{-1} \otimes {}^{gh'} h) (g \otimes h') = (g \otimes h) ({}^{h'g} g^{-1} \otimes {}^{h'g} h) = \\ &= (g \otimes h) ({}^{h'} g \otimes {}^{h'} h)^{-1} \end{aligned}$$

ამით დამტკიცდა (1.7)

ანალოგიურად დამტკიცდება (1.8)-ც

(1.1)-ის, (1.6)-ისა და (1.8)-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$(g^h g^{-1} \otimes g' h' h'^{-1}) = (g^h g^{-1} g' \otimes g^h g^{-1} h') (g' \otimes h')^{-1} = ([g, h] g' \otimes [g, h] h') (g' \otimes h')^{-1} = (g \otimes h) (g' \otimes h') (g \otimes h)^{-1} (g' \otimes h')^{-1} = [(g \otimes h), (g' \otimes h')]$$

ამით დამტკიცდა ბოლო (1.9) ტოლობაც...

წინადადება 1.2 დამტკიცებულია.

2. არააბელური ტენზორული ნამრავლის იზომორფული ჯგუფები

მეორე თავის მიზანი იქნება აიგოს იზომორფიზმი G და H ჯგუფების არააბელური ტენზორული ნამრავლიდან ამ ჯგუფების თავისუფალი ნამრავლის ქვეჯგუფის ფაქტორჯგუფში. მოვიყვანოთ გ. ელისისა და ფ. ლეონარდის მიერ [8]-ში მიღებული შედეგი:

ვთქვათ $G * H$ არის G და H ჯგუფების თავისუფალი ნამრავლი და J არის $G * H$ -ის ისეთი მინიმალური ნორმალური გამყოფი, რომელიც შეიცავს ყველა შემდეგი სახის ელემენტს:

$$x[g, h]x^{-1} [{}^x g, {}^x h]^{-1}$$

$$\text{სადაც } g \in G, h \in H, x \in G \cup H, x \neq 1_G, x \neq 1_H \text{ და } [g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

თეორემა 2.1: არსებობს იზომორფიზმი:

$$((G \otimes H) \rtimes H) \rtimes G \cong G * H/J$$

სადაც $\rtimes$ აღნიშნავს ნახევარ-პირდაპირ ნამრავლს.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ორი ლემა:

ლემა 1. კანონიკური ჰომომორფიზმები: $G \rightarrow G * H/J$ და $H \rightarrow G * H/J$ არიან ინექციები.

ცხადია, რომ კანონიკური პროექცია $G * H \rightarrow G$ ასახავს ერთეულში J -ს ყოველ ელემენტს, ამიტომ იარსებებს $G * H/J \rightarrow G$ -ს მარცხენა ინვერსია, რაც ნიშნავს, რომ კანონიკური ჰომომორფიზმი $G \rightarrow G * H/J$ იქნება ინექცია. ანალოგიურად მეორე კანონიკური ჰომომორფიზმი $H \rightarrow G * H/J$ იქნება ინექცია. ლემა დამტკიცდა.

ლემა 2. არსებობს ჰომომორფიზმი $\Phi: G \otimes H \rightarrow G * H/J$, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\Phi(g \otimes h) = [g, h]$, $\forall g \in G, \forall h \in H$.

იმისათვის, რომ დამტკიცდეს Φ -ს კორექტულობა, საჭიროა შემოწმდეს, რომ ტენზორული ნამრავლის შემდეგი ორი ელემენტი აისახება ერთეულში:

$$(gg' \otimes h)(g \otimes h)^{-1}({}^g g' \otimes {}^g h)^{-1} \quad \text{და} \quad (g \otimes hh')({}^h g \otimes {}^h h')^{-1}(g \otimes h)^{-1}$$

მართლაც:

$$\begin{aligned} \Phi((gg' \otimes h)(g \otimes h)^{-1}({}^g g' \otimes {}^g h)^{-1}) &= g[g', h]g^{-1}[{}^g g', {}^g h]^{-1} = 1_{G * H/J} \quad \text{და} \\ \Phi((g \otimes hh')({}^h g \otimes {}^h h')^{-1}(g \otimes h)^{-1}) &= [g, h]h[g, h']h^{-1}[{}^h g, {}^h h']^{-1}[g, h]^{-1} = 1_{G * H/J} \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცდა.

მოქმედებების შეთანხმებულობის პირობით, (1.1), შესაძლებელია განისაზღვროს G და H ჯგუფების მოქმედება $G \otimes H$ -ზე შემდეგნაირად.

$$x(g \otimes h) = ({}^xg \otimes {}^xh)$$

სადაც $g \in G, h \in H, x \in G \cup H$.

მართლაც, ეს მოქმედება კორექტულადაა განსაზღვრული რადგან:

$$\begin{aligned} x(gg' \otimes h) &= ({}^xg {}^xg' \otimes {}^xh) = \left(({}^xg)({}^xg') \otimes ({}^xg)({}^xh) \right) ({}^xg \otimes {}^xh) = \\ &= ({}^xg {}^xg' \otimes {}^xg {}^xh) ({}^xg \otimes {}^xh) = {}^x({}^g g' \otimes {}^g h) {}^x(g \otimes h) = {}^x(({}^g g' \otimes {}^g h)(g \otimes h)) \end{aligned}$$

ანალოგიურად შემოწმდება შემდეგი ტოლობაც:

$$x(g \otimes hh') = x((g \otimes h)({}^h g \otimes {}^h h'))$$

მაშასადამე ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ $G \otimes H$ -სა და H -ის ნახევარ-პირდაპირი ნამრავლი $(G \otimes H) \rtimes H \dots$ G -ს მოქმედება $(G \otimes H) \rtimes H$ -ზე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$g((g' \otimes h'), h) = (({}^g g' \otimes {}^g h')(g \otimes h), h)$$

$$\forall g, g' \in G, \quad \forall h, h' \in H.$$

საკმაოდ ადვილია იმის შემოწმება, რომ ეს მოქმედება კორექტულადაა განსაზღვრული. ანუ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ $(G \otimes H) \rtimes H$ - ისა და G - ს ნახევარ-პირდაპირი ნამრავლი $((G \otimes H) \rtimes H) \rtimes G$. ახლა კი განვსაზღვროთ ჰომომორფიზმი $f: G * H \rightarrow ((G \otimes H) \rtimes H) \rtimes G$ შემდეგნაირად:

$$f(g) = (1_{\otimes}, 1_H, g) \quad f(h) = (1_{\otimes}, h, 1_G)$$

$$\forall g \in G, \quad \forall h \in H.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა: $f(ghg^{-1}h^{-1}) = (g \otimes h, 1, 1)$ და J - ს ყოველ ელემენტს f ჰომომორფიზმი ასახავს ერთეულში.

მართლაც:

$$\begin{aligned} f([g, h]) &= (1, 1, g)(1, h, 1)(1, 1, g^{-1})(1, h^{-1}, 1) = ((1, 1)^g(1, h), g)((1, 1)^{g^{-1}}(1, h^{-1}), g^{-1}) = \\ &= (g \otimes h, h, g)(g^{-1} \otimes h^{-1}, h^{-1}, g^{-1}) = ((g \otimes h, h)^g(g^{-1} \otimes h^{-1}, h^{-1}), 1) = ((g \otimes h, h)((^g g^{-1} \otimes \\ &\otimes ^g h^{-1})(g \otimes h^{-1}), h^{-1}), 1) = ((g \otimes h, h)(1 \otimes h^{-1}, h^{-1}), 1) = (g \otimes h, 1, 1) \end{aligned}$$

ლემის მეორე ნაწილის საჩვენებლად თუ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ J - ს შემდეგი სახის ელემენტი: $x[g, h]x^{-1}[^x g, ^x h]^{-1}$ მიდის ერთეულში, მაშინ, ცხადია, გამოვა, რომ J - ს ნებისმიერი ელემენტი აისახება ერთეულში, რადგან როგორც $f(h)f(h^{-1})$ ასევე $f(g)f(g^{-1})$ არიან $((G \otimes H) \rtimes H) \rtimes G$ ჯგუფის ერთეულები.

$$\begin{aligned} f(g[g', h']g^{-1}[^g g', ^g h']^{-1}) &= (1, 1, g)(g' \otimes h', 1, 1)(1, 1, g^{-1})(^g g' \otimes ^g h', 1, 1)^{-1} = \\ &= (^g g' \otimes ^g h', 1, g)(1, 1, g^{-1})(^g g' \otimes ^g h', 1, 1)^{-1} = (^g g' \otimes ^g h', 1, 1)(^g g' \otimes ^g h', 1, 1)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

ასევე გვექნება:

$$\begin{aligned} f(h[g', h']h^{-1}[^h g', ^h h']^{-1}) &= (1, h, 1)(g' \otimes h', 1, 1)(1, h^{-1}, 1)(^h g' \otimes ^h h', 1, 1)^{-1} = \\ &= (^h g' \otimes ^h h', h, 1)(1, h^{-1}, 1)(^h g' \otimes ^h h', 1, 1)^{-1} = (^h g' \otimes ^h h', 1, 1)(^h g' \otimes ^h h', 1, 1)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

მაშასადამე ლემა დამტკიცებულია.

ამ ლემის თანახმად შეგვიძია დავასკვნათ, რომ f ჰომომორფიზმი წარმოშობს შემდეგ $f': G * H/J \rightarrow ((G \otimes H) \rtimes H) \rtimes G$ ჰომომორფიზმს და f' კომპოზიცია იქნება იგივეური $G \otimes H$ - ზე. ანუ f' ამყარებს იზომორფიზმს K - სა და $G \otimes H$ - ს შორის, სადაც K არის $G * H$ - ის $[g, h]$ ელემენტებით წარმოქმნილი ნორმალური ქვეჯგუფი ($g \in G, h \in H$). ასე რომ გვექნება შემდეგი კომუტაციური დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccccc}
K & \mapsto & G * H/J & \twoheadrightarrow & G \times H \\
\downarrow \cong & & \downarrow f' & & \downarrow \cong \\
G \otimes H & \mapsto & ((G \otimes H) \rtimes H) \rtimes G & \twoheadrightarrow & G \times H
\end{array}$$

რომელშიც ორივე სტრიქონი არის მოკლე ზუსტი მიმდევრობა. საიდანაც ჩვენ ვასკვნით, რომ f' არის იზომორფიზმი, რაც ნიშნავს თეორემის დამტკიცებას...

როგორც ვნახეთ ასევე დამტკიცდა შემდეგი ორი ჯგუფის იზომორფულობა:

$$G \otimes H \cong K$$

შემდეგი თეორემა შეეხება ამავე ფაქტს. მასში მტკიცდება იგივე იზომორფიზმის არსებობა სხვა გზით, რომელშიც მოქმედებებს უფრო ნაკლები პირობა ედება.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ *რ. ბრაუნისა* და *ჟ.-ლ. ლოდეს* მიერ შემოტანილ ტენზორულ ნამრავლში აღარ ვითხოვთ პირობას, რომ ჯგუფები თავის თავზე მოქმედებენ შეუღლებით და ერთმანეთზე - შეთანხმებულად.

თეორემა 2.2: ვთქვათ მოცემული გვაქვს ორი G და H ჯგუფი, რომელთაგან თითოეული მოქმედებს როგორც საკუთარ თავზე, ასევე, მეორე ჯგუფზეც. თუ ეს მოქმედებები აკმაყოფილებენ შემდეგ ოთხ პირობას:

$$({}^g h)g' = ghg^{-1}g', \quad ({}^g h)h' = ghg^{-1}h', \quad ({}^h g)g' = hgh^{-1}g', \quad ({}^h g)h' = hgh^{-1}h'. \quad (2.1)$$

$$\forall g, g' \in G, \quad \forall h, h' \in H.$$

მაშინ არსებობს იზომორფიზმი: $G \otimes H \cong K$

დამტკიცება. განვიხილოთ ჰომომორფიზმი: $\Phi: G \otimes H \rightarrow K$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $\Phi(g \otimes h) = [g, h]$. როგორც ზემოთ ვნახეთ ეს ასახვა ნამდვილად არის ჰომომორფიზმი. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\Psi([g, h]) = (g \otimes h)$ ასახვაც ჰომომორფიზმია. ამისათვის უნდა შევამოწმოთ, რომ J -ს ყოველი ელემენტი აისახება ერთეულში. პირველ რიგში ჩვენ შევამოწმოთ, რომ Ψ ასახვით აისახება ერთეულში შემდეგი ორი სახის J -ს ელემენტი:

1. $ghg_1[g', h']g_1^{-1}[{}^{g_1}g', {}^{g_1}h']^{-1}h^{-1}g^{-1}$
2. $ghh_1[g', h']h_1^{-1}[{}^{h_1}g', {}^{h_1}h']^{-1}h^{-1}g^{-1}$

მართლაც

$$\begin{aligned} \Psi(ghg_1[g', h']g_1^{-1}[{}^{g_1}g', {}^{g_1}h']^{-1}h^{-1}g^{-1}) &= \Psi([g, h][gg_1g', h]^{-1}[gg_1g', hh'] [gg_1, hh']^{-1} * \\ &* [gg_1, h][g, h]^{-1}[g, h {}^{g_1}h'] [g {}^{g_1}g', h {}^{g_1}h']^{-1}[g {}^{g_1}g', h][g, h]^{-1}) = (g \otimes h)(gg_1g' \otimes h)^{-1} * \\ &* (gg_1g' \otimes hh')(gg_1 \otimes hh')^{-1}(gg_1 \otimes h)(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h {}^{g_1}h')(g {}^{g_1}g' \otimes h {}^{g_1}h')^{-1}(g {}^{g_1}g' \otimes h) * \\ &* (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h)({}^h g {}^h g_1 {}^h g' \otimes {}^h h')({}^h g {}^h g_1 \otimes {}^h h')^{-1}({}^h g \otimes {}^h g_1 h')({}^h g {}^h g_1 g' \otimes {}^h g_1 h')^{-1} * \\ &* (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h)({}^h g {}^h g_1 h' g' \otimes {}^h g {}^h g_1 h' h')({}^h g h g_1 g' \otimes {}^h g h g_1 h')^{-1}(g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h) * \\ &* ({}^h g h^{-1} h g_1 h^{-1} h' g' \otimes {}^h g h^{-1} h g_1 h^{-1} h' h')({}^h g h^{-1} h g_1 g' \otimes {}^h g h^{-1} h g_1 h')^{-1}(g \otimes h)^{-1} = 1_{\otimes} \end{aligned}$$

ასევე:

$$\begin{aligned} \Psi(ghh_1[g', h']h_1^{-1}[{}^{h_1}g', {}^{h_1}h']^{-1}h^{-1}g^{-1}) &= \Psi([g, hh_1][gg', hh_1]^{-1}[gg', hh_1 h'] [g, hh_1 h']^{-1} * \\ &* [g, h {}^{h_1}h'] [g {}^{h_1}g', h {}^{h_1}h']^{-1}[g {}^{h_1}g', h][g, h]^{-1}) = (g \otimes hh_1)(gg' \otimes hh_1)^{-1}(gg' \otimes hh_1 h') * \\ &* (g \otimes hh_1 h')^{-1}(g \otimes h {}^{h_1}h')(g {}^{h_1}g' \otimes h {}^{h_1}h')^{-1}(g {}^{h_1}g' \otimes h)(g \otimes h)^{-1} = ({}^g g' \otimes {}^g h {}^g h_1)^{-1} * \\ &* ({}^g g' \otimes {}^g h {}^g h_1 g' h')({}^{gh_1} g' \otimes {}^{gh_1} g h {}^{gh_1} h')^{-1}({}^{gh_1} g' \otimes {}^g h) = ({}^g h {}^g h_1 g' \otimes {}^g h {}^g h_1 g h') * \\ &* ({}^g h g h_1 g' \otimes {}^g h g h_1 h')^{-1} = ({}^{gh} g^{-1} g h_1 g^{-1} g' \otimes {}^{gh} g^{-1} g h_1 g^{-1} g h')({}^{gh} g^{-1} g h_1 g' \otimes {}^{gh} g^{-1} g h_1 h')^{-1} = \\ &= ({}^{gh} h_1 g' \otimes {}^{gh} h_1 h')({}^{gh} h_1 g' \otimes {}^{gh} h_1 h')^{-1} = 1_{\otimes} \end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ J - ს ნებისმიერი ელემენტი:

$$Mx[g', h']x^{-1}[{}^xg', {}^xh']^{-1}M^{-1}$$

$$\text{სადაც } g' \in G, h' \in H, x \in G \cup H, M \in G * H$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ელემენტი Ψ ასახვით აისახება ერთეულში. პირველ რიგში დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა: $G * H$ თავისუფალი ნამრავლის ნებისმიერი M ელემენტი წარმოიდგინება შემდეგი სახით: $M = kgh$, სადაც $k \in K$, ხოლო g და h , შესასბამისად, G და H ჯგუფების ელემენტებია.

ვთქვათ $M = g_1h_1g_2h_2 \dots g_nh_n$. ლემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. როცა $n = 1$ მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია. დავუშვათ $n = i - 1$ - სთვის ლემა ჭეშმარიტია. მაშინ $n = i$ - სთვის გვექნება:

$$g_1h_1 \dots g_{i-1}h_{i-1}g_ih_i = kghg_ih_i = k[g, h][gg_i, h]^{-1}gg_ihh_i = k'g'h'. \quad k' \in K.$$

ინდუქციის პრინციპის თანახმად ლემა დამტკიცებულია.

ლემის გამოყენებით გვექნება შემდეგი რამ:

$$\begin{aligned} \Psi(Mx[g', h']x^{-1}[{}^xg', {}^xh']^{-1}M^{-1}) &= \Psi(kghx[g', h']x^{-1}[{}^xg', {}^xh']^{-1}h^{-1}g^{-1}k^{-1}) = \\ &= \Psi(k) * 1_{\otimes} * \Psi(k^{-1}) = 1_{\otimes} \end{aligned}$$

ანუ Ψ ასახვით J -ს ყველა ელემენტი მიდის ერთეულში. დებულება დამტკიცებულია.

მოვიყავნოთ კიდევ ერთ თეორემა, რომელშიც მოქმედებებს არცერთი პირობა არ ედება. ვთქვათ $\alpha : G * H \rightarrow G \times H$ არის კანონიერი ჰომომორფიზმი.

თეორემა 2.3: არსებობს იზომორფიზმი

$$(G \square H)/J \cong G \otimes H$$

სადაც $G \square H = \ker \alpha$, ხოლო J არის $G \square H$ ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი, რომელიც წარმოქმნილია შემდეგი ელემენტებით:

$$x[g, h]x^{-1} [{}^xg, {}^xh]^{-1}$$

$$g \in G, \quad h \in H, \quad x \in GUH$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ შემდეგი ლემა:

ლემა: $G \square H$ არის თავისუფალი ჯგუფი წარმოქმნილი $[g, h]$ ელემენტებით, სადაც $g \in G$ და $h \in H$.

თავიდან ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $G * H$ - ის ნებისმიერი ელემენტი $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n$ წარმოიდგინება $kg_1 g_2 \dots g_n h_1 h_2 \dots h_n$ სახით, სადაც k არის $[g, h]$ ტიპის ელემენტების ნამრავლი. დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით n - ს მიმართ. როცა $n = 1$ ლემა ცხადია. ვთქვათ ლემა ჭეშმარიტია $n = i - 1$ - სთვის. მაშინ $n = i$ - სთვის გვექნება:

$$g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_{i-1} h_{i-1} g_i h_i = k g_1 g_2 \dots g_{i-1} h_1 h_2 \dots h_{i-1} g_i h_i = k [g_1 g_2 \dots g_{i-1}, h_1 h_2 \dots h_{i-1}] * [g_1 g_2 \dots g_i, h_1 h_2 \dots h_{i-1}]^{-1} g_1 g_2 \dots g_i h_1 h_2 \dots h_i$$

ესე იგი დებულება $n = i$ - სთვისაც სამართლიანია. ინდუქციის პრინციპის თანახმად ლემა დამტკიცებულია, რადგან თუ ჩვენ $g_1 h_1 \dots g_n h_n$ ელემენტს ავიღებთ $\ker \alpha$ - დან მაშინ $g_1 \dots g_n h_1 \dots h_n = 1$ და მივიღებთ, რომ $G \square H$ - ის ელემენტი მხოლოდ $[g, h]$ ტიპის ელემენტების ნამრავლს წარმოადგენს...

ახლა დავუბრუნდეთ თეორემას. წინა თეორემის მტკიცების მსგავსად, განვიხილოთ შემდეგი ასახვა: $\Phi: G \otimes H \rightarrow (G \boxtimes H)/J$ რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $\Phi(g \otimes h) = [g, h] \quad \forall \quad g \in G \text{ და } h \in H \dots$ ვაჩვენოთ, რომ ეს ასახვა წარმოადგენს იზომორფიზმს აღნიშნულ ჯგუფებს შორის.

დავამტკიცოთ Φ -ს კორექტულობა, ამისათვის საჭიროა შემოწმდეს, რომ ტენზორული ნამრავლის შემდეგი ორი ელემენტი აისახება $(G \boxtimes H)/J$ ჯგუფის ერთეულში:

$$(g g' \otimes h)(g \otimes h)^{-1} ({}^g g' \otimes {}^g h)^{-1} \quad \text{და} \quad (g \otimes h h')({}^h g \otimes {}^h h')^{-1} (g \otimes h)^{-1}$$

მართლაც:

$$\Phi((g g' \otimes h)(g \otimes h)^{-1} ({}^g g' \otimes {}^g h)^{-1}) = g[g', h]g^{-1}[{}^g g', {}^g h]^{-1} = 1_{G * H/J}$$

ასევე:

$$\Phi((g \otimes h h')({}^h g \otimes {}^h h')^{-1} (g \otimes h)^{-1}) = [g, h]h[g, h']h^{-1}[{}^h g, {}^h h']^{-1}[g, h]^{-1} = 1_{G * H/J}$$

ეს ამტკიცებს, რომ Φ კორექტულადაა განსაზღვრული, ანუ ის წარმოადგენს ჰომომორფიზმს.

ახლა ჩვენ უნდა ავაგოთ $\Phi^{-1}: (G \boxtimes H)/J \rightarrow G \otimes H$ ასახვა. ბუნებრივად იგი შემდეგნაირად უნდა განიმარტოს: $\Phi^{-1}([g, h]) = (g \otimes h)$. ლემის თანახმად ასეთი განმარტება საკმარისია. მთავარია ახლა ვაჩვენოთ, რომ იმ ჯგუფის ყველა ელემენტი, რომლითაც ვახდენთ გაფაქტორებას, მიდის ერთეულში.

განვიხილოთ J - ს ნებისმიერი ელემენტი:

$$Mx[g, h]x^{-1}[{}^x g, {}^x h]^{-1}M^{-1}$$

$$\text{სადაც } g \in G, \quad h \in H, \quad x \in G \cup H, \quad M \in G \boxtimes H.$$

ლემის თანახმად M არის შემდეგი სახის: $[g_1, h_1][g_2, h_2] \dots [g_n, h_n]$.

განვიხილოთ შემთხვევა როცა, $x = g' \in G$.

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}(Mx[g, h]x^{-1}[{}^xg, {}^xh]^{-1}M^{-1}) = \\ & = \Phi^{-1}([g_1, h_1] \dots [g_n, h_n]g'[g, h]g'^{-1}[{}^{g'}g, {}^{g'}h]^{-1}[g_n, h_n]^{-1} \dots [g_1, h_1]^{-1}) = \\ & = \Phi^{-1}([g_1, h_1] \dots [g_n, h_n][g'g, h][g', h]^{-1}[{}^{g'}g, {}^{g'}h]^{-1}[g_n, h_n]^{-1} \dots [g_1, h_1]^{-1}) = \\ & = (g_1 \otimes h_1) \dots (g_n \otimes h_n)(g'g \otimes h)(g' \otimes h)^{-1}({}^{g'}g \otimes {}^{g'}h)^{-1}(g_n \otimes h_n)^{-1} \dots (g_1 \otimes h_1)^{-1} = 1_{\otimes} \end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $x = h' \in H$.

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}(Mx[g, h]x^{-1}[{}^xg, {}^xh]^{-1}M^{-1}) = \\ & = \Phi^{-1}([g_1, h_1] \dots [g_n, h_n]h'[g, h]h'^{-1}[{}^{h'}g, {}^{h'}h]^{-1}[g_n, h_n]^{-1} \dots [g_1, h_1]^{-1}) = \\ & = \Phi^{-1}([g_1, h_1] \dots [g_n, h_n][g, h']^{-1}[g, h'h][{}^{h'}g, {}^{h'}h]^{-1}[g_n, h_n]^{-1} \dots [g_1, h_1]^{-1}) = \\ & = (g_1 \otimes h_1) \dots (g_n \otimes h_n)(g \otimes h')^{-1}(g \otimes h'h)({}^{h'}g \otimes {}^{h'}h)^{-1}(g_n \otimes h_n)^{-1} \dots (g_1 \otimes h_1)^{-1} = 1_{\otimes} \end{aligned}$$

ანუ Φ^{-1} ტრივიალურია J - ზე, ამიტომ Φ ჰომომორფიზმი ამყარებს იზომორფიზმს აღნიშნულ ჯგუფებს შორის... თეორემა დამტკიცებულია.

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] R.Brown and J.-L.Loday, *Excision Homotopique en Basse Dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris S.I. Math. 298(15) (1984), 353-356.
- [2] R.Brown and J.-L.Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology 26 (1987), 311-335.
- [3] H. Inassaridze and N. Inassaridze, *Non-abelian homology of groups*, K-Theory 378 (1999), 1-17.
- [4] N. Inassaridze, *Non-abelian tensor products and non-abelian homology of groups*, J. Pure Applied. Algebra 112 (1996), 191-205.
- [5] N. Inassaridze, *Finiteness of a non-abelian tensor product of groups*, Theory and Applications. of Categories, Vol.2, No.5, (1996), 55-61.
- [6] N. Inassaridze, *Relationship of non-abelian tensor products and non-abelian homology of groups.* with Whitehead's gamma functor, Proc. A.Razmadze Math. Inst. Georgian Acad. Sci. 117. (1998), 31-52.
- [7] M.Ladra and V.Z. Thomas, *Two generalizations of the nonabelian tensor product*, arxiv: 1106.2136v1 (2011).
- [8] G. Ellis and F. Leonard, *Computing Schur multiplier and tensor products of finite groups*.