



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ხათუნა მშვენიერაძე

I სემესტრის დოქტორანტი

*არანიუტონისეული გამტარი სითხის სასაზღვრო
ფენში მოძრაობის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის
ინტეგრალური მეთოდი*

კოლოქვიუმი №1

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ჯონდო შარიქაძე
ფიზ. მათ. მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ სრული პროფესორი

თბილისი 2013 წელი

შ ი ნ ა რ ს ი

შესავალი-----	3
§1 არანიუტონისეული სითხეების რეოლოგიური კანონები-----	4
§2 ხარისხოვან სითხეთა სასაზღვრო ფენი-----	9
§3 საწყისი და სასაზღვრო პირობები-----	13
§4 ბლანტი გამტარი სითხის სტაციონარული სასაზღვრო ფენის მიახლოებითი ამოხსნის ინტეგრალური მეთოდი-----	16
დასკვნა-----	25
გამოყენებული ლიტერატურა-----	26

შესავალი

სითხეების უმრავლესობა და ასევე ყველა აირი წარმოადგენს ნიუტონისეულ სითხეს. თხელი სუსპენზიები, თიხიანი ხსნარები, ზეთოვანი საღებავები თავიანთი თვისებებით განსხვავდებიან ნიუტონისეული სითხეებისაგან. ასეთი არანიუტონისეული სითხეების სიბლანტე უკვე აღარ წარმოადგენს მხოლოდ ტემპერატურაზე და წნევაზე დამოკიდებულ სიდიდეს, არამედ ხდება ძვრის სიჩქარისა და სხვა ფაქტორების, დეფორმაციის, მოძრაობის და დროის ფუნქცია. არანიუტონისეული სითხეების დინებათა კანონზომიერების გამოკვლევა დიდ მნიშვნელობას იძენს მრეწველობასა და ტექნიკაში ახალი მასალების შექმნისა და ფართო გამოყენებისათვის, ასევე სხვადასხვა ბიოლოგიური გარემოს დინებათა შესწავლისას.

ნაშრომში გამოკვლეულია სტაციონარული სასაზღვრო ფენი არანიუტონისეული სითხისა, რომლის ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი მუდმივია $\sigma = \sigma_0$ ან იცვლება სიჩქარის მიხედვით

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right).$$

ნაპოვნია სითხის სიჩქარის, დინამიკური სასაზღვრო ფენის სისქეების და ფირფიტაზე ხახუნის ძალის მნიშვნელობები.

§1. არანიუტონისეული სითხეების რეოლოგიური კანონები

სითხეების უმრავლესობა და ასევე ყველა აირი წარმოადგენს ნიუტონისეულ სითხეს, რომელიც აღიწერება შემდეგი რეოლოგიური კანონით

$$P = 2\mu\dot{\epsilon} - p\delta, \quad (1.1)$$

სადაც P არის ძაბვის ტენზორი, $\dot{\epsilon}$ – დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი, μ – სიბლანტის კოეფიციენტი, δ – ერთეულოვანი ტენზორი, ხოლო p გამოითვლება წნევის კომპონენტების საშუალებით

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) \quad (1.2)$$

ნიუტონისეული სითხეებისათვის ძაბვის სიჩქარეზე დამოკიდებულების გრაფიკი, ე.წ. დინების მრუდი წარმოადგენს სწორ ხაზს დახრის კუთხის ტანგენსით μ . ამავდროს ეს ერთადერთი მუდმივი სრულიად ახასიათებს სითხეს. არანიუტონისეული სითხეებისათვის დინების მრუდი უკვე აღარაა წრფივი, რადგან სიბლანტე დამოკიდებულია სითხის სხვა მახასიათებლებზე, მისი მოძრაობის წინაისტორიაზე და იმ აპარატურის კონსტრუქციულ თავისებურებებზე, რომელშიც იმყოფება სითხე.

დინების არაწრფივი მრუდის მქონე იმ რეალური სითხეების რეოლოგიური კანონის აღწერა, რომელთა ძვრის სიჩქარე ყოველ წერტილში წარმოადგენს ამავე წერტილში მხოლოდ ძვრის ძაბვის რაიმე ფუნქციას და არაა დამოკიდებული დროზე, შეიძლება შემდეგი განტოლებით

$$\dot{\epsilon} = f(\tau), \quad (1.3)$$

აღიწეროს, სადაც τ არის ძვრის ძაბვა. ასეთი ნივთიერებები იწოდებიან არანიუტონისეულ ბლანტ სითხეებად. (1.3) ფუნქციის გამოსახულების მიხედვით მათ ყოფენ სამ ჯგუფად:

- ა) ბინგამისეულ პლასტიკური (ბლანტ – პლასტიკური), ფსევდოპლასტიკური და დილატანტური სითხეებად;
- ბ) ტიქსოტროპული და რეოპექტური სითხეებად;
- გ) ბლანტ – დრეკადი სითხეებად.

პირველ ჯგუფს განეკუთვნებიან ისეთები, რომელთათვისაც ძვრის სიჩქარე ყოველ წერტილში არის მოცემული წერტილის ძვრის ძაბვის ფუნქცია. მეორე ჯგუფს აკუთვნებენ სითხეებს, რომელთათვისაც ძვრის სიჩქარე დამოკიდებულია მოცემული წერტილის ძვრის ძაბვასა და ამ ძაბვის მოქმედების დროზე. მესამე ჯგუფში შედის ისეთი სითხეები, რომლებსაც

გააჩნიათ, როგორც მყარი სხეულის, ისე სითხის თვისებებიც. მათთვის დამახასიათებელია ფორმის ნაწილობრივი აღდგენა ძაბვის მოხსნის შემდეგ.

ბინგამისეულ პლასტიკური სითხეებისათვის კავშირი ძვრის ძაბვასა და სიჩქარეს შორის ასე გამოისახება:

$$\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot{\epsilon}, \quad \text{როცა } \tau > \tau_0 \quad (1.4)$$

სადაც τ_0 არის ზღვრული ძვრის ძაბვა, μ_0 – პლასტიკური ანუ სტრუქტურული სიბლანტის კოეფიციენტი და რიცხობრივად ტოლია დინების მრუდის დახრის კუთხის ტანგენსის, როცა $\tau < \tau_0$ დინება ქრება ($\dot{\epsilon} = 0$) და $\tau = 0$, ე. ი. გარემო იქცევა ისე, როგორც მყარი სხეული. ასეთ სითხეებს განეკუთვნებიან ზეთოვანი საღებავები, ჭაბურღილის ხსნარები, თიხისა და ცემენტის ხსნარები, კბილის პასტა. ყველა ამ სითხის განსაკუთრებული თვისებების ფიზიკური ახსნა ეფუძნება შემდეგ წარმოდგენას: უძრავ მდგომარეობაში მათ გააჩნიათ მტკიცე სტრუქტურა, რომელიც ეწინააღმდეგება ნებისმიერ გარე ზემოქმედებას მანამ, სანამ მათ მიერ გამოწვეული ძვრის ძაბვა არ გადააჭარბებს სტრუქტურის ზღვრულ ძაბვას. ამის შემდეგ სტრუქტურა მთლად ირღვევა და სითხე იქცევა როგორც ჩვეულებრივი არანიუტონისეული ბლანტი სითხე. ამ დროს მხები ძაბვა ტოლია ნაზრდის $\tau - \tau_0$, რაც წარმოადგენს ნამდვილი და ზღვრული ძაბვების სხვაობას. მხები ძაბვის ნულამდე შემცირებისას, ე. ი. ნამდვილი ძაბვის ზღვრულ ძაბვასთან დაბრუნებისას, სივრცული თხევადი სტრუქტურა აღდგება.

ფსევდოპლასტიკური სითხეებისათვის მხები ძაბვა განისაზღვრება კოეფიციენტით, რომელიც დამოკიდებულია ძვრის სიჩქარეზე. ასეთი „არაწრფივი“ სითხეები ემორჩილებიან რეოლოგიურ განტოლებას, რომელიც პირველად წარმოგვიდგინა ოსტვალდმა, შემდეგ კი გააუმჯობესა რეინერმა

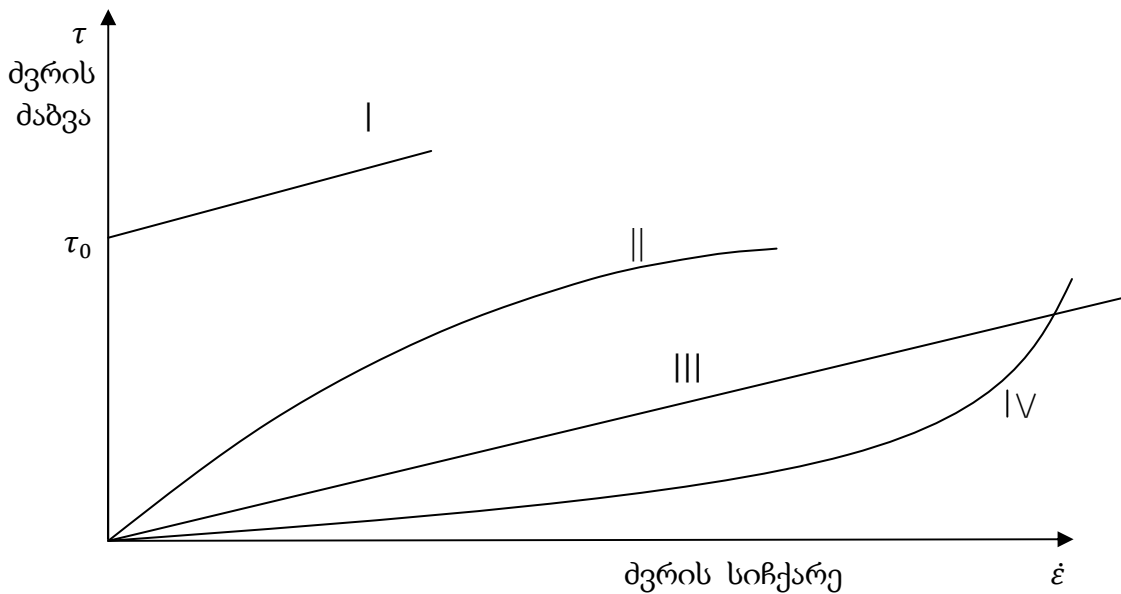
$$\tau = k \dot{\epsilon}^n, \quad (1.5)$$

სადაც $k < 1$ და $n < 1$ თითქმის მუდმივნი არიან ძაბვისა და დეფორმაციის სიჩქარის ფართო ინტერვალში, ხოლო მხები სიბლანტის კოეფიციენტი $\tau/\dot{\epsilon} = k \dot{\epsilon}^{n-1}$ მცირდება $\dot{\epsilon}$ – ის ზრდით. როდესაც $n = 1$ მაშინ (1.5) დაიყვანება ნიუტონისეული სითხის განმარტებაზე. k გვიჩვენებს სითხის კონსისტენციის ზომას. რაც მეტია სითხის სიბლანტე, მით დიდია k . ფსევდოპლასტიკური სითხეებია სუსპენზიები, მაღალპოლიმერული ხსნარები.

დილატანტური ისეთი სითხეებია, რომელთათვისაც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ოსტვალდ – ვეილის მოდელი, მაგრამ მხოლოდ მაშინ, როცა $n > 1$. მათთვის, განსხვავებით ფსევდოპლასტიკურებისაგან, მხები სიბლანტე იზრდება ძაბვის გაზრდის შედეგად. ასეთი კანონზომიერება დაიკვირვება, მაგალითად მყარი ნაწილაკების სუსპენზიებში მათი დიდი კონცენტრაციისას. ფსევდოპლასტიკურ და დილატანტურ სითხეებს ანომალურ ბლანტ სითხეებსაც უწოდებენ დინების არაწრფივი მრუდის გამო. როგორც უილკინსონის მონოგრაფიაშია მითითებული დილატანტური თვისება შეიძლება ასევე გააჩნდეთ სითხეებს, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან მყარი

ნაწილაკების კონცენტრირებულ სუსპენზიებს (მაგ.: სახამებლის წებო).

პირველი ჯგუფის სითხეების მახასიათებელი დინების მრუდები მიღებულია უილკინსონის მიერ



ნახ. 1

- I – ბინგამისეულ პლასტიკური;
- II – ფსევდოპლასტიკური, $n < 1$;
- III – ნიუტონისეული;
- IV – დილატანტური, $n > 1$;

ბინგამისეული გარემოს დინების მრუდი წარმოადგენს წრფეს, რომელიც კვეთს ძაბვის ღერძს სათავიდან τ_0 დაშორებით. ფსევდოპლასტიკურ სითხეებს არ აღმოაჩნდათ ზღვრული ძაბვა და მხები სიბლანტე ძვრის სიჩქარის ზრდისას თანათან მცირდება. დინების მრუდი წრფივი ხდება ხოლოდ ძვრის სიჩქარის სიდიდით ძალიან დიდი მნიშვნელობებისას. დილატანტური გარემოს აღმოჩენა პირველად მოხდა რეინოლდსის მიერ.

არანიუტონისეული სითხეებისათვის კავშირი τ_{ij} ძაბვის ტენზორსა და დეფორმაციის სიჩქარის $\dot{e}_{ij}$ ტენზორს შორის უფრო რთულია და აქვს სახე

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{ml} \dot{e}_{lm} \right|^{\frac{n-1}{2}} e_{ij}, \quad (1.6)$$

სადაც δ_{ij} არის კრონეკერის სიმბოლო.

მეორე ჯგუფის სითხეებისთვის სიბლანტე დამოკიდებულია არა მარტო ძვრის სიჩქარეზე, არამედ სითხის მოძრაობის წინაისტორიაზე და

დეფორმაციის ხანგრძლივობაზე. იმისდა მიხედვით იზრდება თუ მცირდება დროის შესაბამისად ძვრის ძაბვა, როცა სითხე დეფორმირდება მუდმივი სიჩქარით, ამ ჯგუფის სითხეებს ყოფენ ტიქსოტროპულ და რეოპექტულ სითხეებად. რეოპექტულ სითხეებში სტრუქტურის სიმტკიცე იზრდება ძვრითი მოძრაობის არსებობისას, დანარჩენებში პირიქით – სტრუქტურა ირღვევა. ტიქსოტროპულ ტიპს შეიძლება მივაკუთვნოთ, მაგალითად ცემენტის ხსნარები „გაქვქვების“ რეჟიმში, გამდნარი ლითონები, რომლებიც თხევად მდგომარეობაში წარმოადგენენ სუფთა ნიუტონისეულ სითხეებს, ხოლო გამყარების საწყის სტადიაში ივსება უმცირესი კრისტალური წარმონაქმნებით, რაც მათ აახლოვებს დილატანტურ სითხეებთან.

მესამე ჯგუფს მიაკუთვნებენ ისეთ სითხეებს, რომლებიც ხასიათებიან როგორც ბლანტი დენადობის, ისე, ფორმის დრეკადი ალდეგენის თვისებებით. ასეთებს ბლანტ – დრეკად სითხეებს უწოდებენ. მათ რიცხვში შეიძლება შევიტანოთ სხვადასხვაგვარი დიდი სიბლანტის მქონე სითხეები, კერძოდ „ფისები“. მათი რეოლოგიური კანონების კანონზომიერებანი წარმოგვიდგინა ფოიხტმა და მაქსველმა.

ფოიხტის კანონში გათვალისწინებულია დრეკადი და ბლანტი მოქმედების „პარალელურობა“, როდესაც მხები ძაბვა τ წარმოადგენს უბრალო ჯამს $\tau_1 = G\varepsilon$ (ε – ძვრის დეფორმაცია, G – ძვრის მოდული) დრეკადი ძაბვისა და $\tau_2 = \mu\dot{\varepsilon}$ – ისა (μ – სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი, $\dot{\varepsilon}$ – ძვრის სიჩქარე)

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = G\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}. \quad (1.7)$$

ამ განტოლების დროით ინტეგრებით, თუ მივიჩნევთ რომ დაძაბულობა მუდმივია ($\tau = \tau_0$) და საწყისი დეფორმაცია ნულია, მივიღებთ თანაფარდობას

$$\varepsilon = \frac{\tau_0}{G} \left[1 - \exp \left(-\frac{Gt}{\mu} \right) \right], \quad (1.8)$$

რომელიც გამოხატავს მუდმივი ძაბვის მოქმედებით დრეკადი დეფორმაციის (τ_0/G) დაგვიანებითი დამყარების მოვლენას, როცა $t \rightarrow \infty$. μ/G მუდმივი აქ თამაშობს პროცესის დროისათვის მახასიათებელ როლს და ეწოდება „დაგვიანების დრო“. თუ (1.7) – ს ვაინტეგრებთ ცნობილი საწყისი დეფორმაციის არსებობისას ძაბვის მყისიერი მოხსნის ამოცანისათვის, მივიღებთ ტოლობას

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp \left(-\frac{Gt}{\mu} \right), \quad (1.9)$$

რომელიც წარმოადგენს დეფორმაციის კლების დაგვიანებას ძაბვის მოხსნის შემდეგ. დაგვიანების დრო იგივეა, რაც წინა შემთხვევაში.

მაქსველის რეოლოგიური კანონი ეფუძნება დრეკადობის და სიბლანტის „მიმდევრობით“ მოქმედებას

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\mu}, \quad (1.10)$$

რომელიც გამოისახება დრეკადი დეფორმაციისას ($\dot{\epsilon}_1 = \dot{\tau}/G$) და ბლანტი მოძრაობისას ($\dot{\epsilon}_2 = \tau/\mu$) ძვრის სიჩქარეთა ჯამით.

(1.10) – ის ინტეგრებით მუდმივი ϵ დეფორმაციისას და საწყისი τ_0 ძაბვისას, მივიღებთ ტოლობას

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{Gt}{\mu}\right), \quad (1.11)$$

რომელიც წარმოადგენს კლების კანონს, ანუ, როგორც ამბობენ ძაბვის „რელაქსაციის“ კანონს. ამ შემთხვევაში დროში მუდმივი სიდიდე μ/G თამაშობს „რელაქსაციის დროის“ როლს.

ფოიხტის და მაქსველის მოდელებს შორის არსებითი განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ ფოიხტის მოდელს ახასიათებს მუდმივი ძაბვის მოქმედებისას ძვრის $\dot{\epsilon}$ სიჩქარე, რომელიც მიიღება (1.8) – ის დროთო დიფერენცირებით; როცა $t \rightarrow \infty$, ის სწრაფად მიისწრაფის ნულისაკენ, ე. ი. ფოიხტის „სხეული“ მუდმივი დატვირთვის მოქმედებისას არ ფლობს უსაზღვრო გადინების თვისებას. მაქსველის „სხეულისათვის“, როგორც (1.10) – იდან ადვილად ჩანს $\tau = \tau_0$ და $\dot{\tau} = 0$ პირობებში ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$\dot{\epsilon} \rightarrow \frac{\tau_0}{\mu} \neq 0, \quad \text{როცა} \quad t \rightarrow \infty.$$

ფოიხტის „სხეულებისაგან“ განსხვავებით იგი იქნება დინებადი მუდმივი დატვირთვის მოქმედებისას და ექნება მუდმივი ძვრის სიჩქარე $\dot{\epsilon} = \tau_0/\mu$. ამიტომ ფოიხტის რეოლოგიურ კანონზე დაქვემდებარებულ გარემოს ხშირად უწოდებენ ბლანტი – დრეკად „მყარ“ სხეულს, განსხვავებით მაქსველის „სხეულისაგან“, რომელიც წარმოადგენს ბლანტიდრეკად „სითხეს“.

§2. ხარისხოვან სითხეთა სასაზღვრო ფენი

სასაზღვრო ფენის თეორია აღწერს მექანიკური პროცესების მიმდინარეობას მყარი სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში. სასაზღვრო ფენის თეორიაში ინერციის კვადრატული წევრები მთლიანად არის შენარჩუნებული, ხოლო სიბლანტის წევრები მხოლოდ ნაწილობრივ არიან გათვალისწინებული.

პრაქტიკულად განსაკუთრებით საინტერესოა ისეთი მოძრაობები, რომლებშიც ინერციული ეფექტები სჭარბობენ ხახუნის ძალების გავლენას. როგორც ცნობილია, ამ ორი ძირითადი ძალის კლასთა ფარდობის ზომას რეინოლდსის რიცხვი წარმოადგენს. სწორედ ამიტომ განსახილველი შემთხვევა არის მოძრაობა რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობის დროს. ამ შემთხვევაში სხეულების გარსდენისას სითხის მთელი ნაკადი ორ არედ შეიძლება დაიყოს:

1. მცირე სისქის მქონე არე სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში, რომელსაც სასაზღვრო ფენს უწოდებენ და რომელშიც სიბლანტის ძალების ზემოქმედება ისეთივე არსებითია, როგორც სხვა ძალებისა; ამ არეში სიჩქარის გრადიენტი $\frac{\partial U}{\partial y}$ კედლის პერპენდიკულარული მიმართულებით ძალიან დიდია, ხოლო μ სიბლანტე, როგორი მცირეც არ უნდა იყოს, ახდენს არსებით გავლენას დინებაზე, რამდენადაც ხახუნის მიერ გამოწვეულმა

მხეხმა $\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$ მახვამ შეიძლება მიიღოს დიდი მნიშვნელობები.

2. არე, რომელშიდაც უგულებელყოფილია სიბლანტე, გარე არედ იწოდება. ამ არეში სიჩქარის გრადიენტი ვერ აღწევს ისეთ დიდ მნიშვნელობებს, როგორც სასაზღვრო ფენში, და ამიტომ სიბლანტის გავლენა არ თამაშობს როლს. მაშასადამე, შეიძლება ჩაითვალოს რომ აქ დინება პოტენციალურია. გარე არეში სითხე შეიძლება იდეალურად ჩაითვალოს.

ასე, რომ საკითხი ეხება თითოეულ არეში სითხის მოძრაობების ცალ – ცალკე შესწავლას მოძრაობის გამარტივებული განტოლებების საშუალებით და შემდეგ მათ „შეკვრას“ როგორც ერთი მთლიანისას. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია სითხის ნაკადის რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობა, იცვლება სასაზღვრო ფენისა და გარე ნაკადის სისქე. რაც უფრო დიდია რეინოლდსის რიცხვი, მით თხელია სასაზღვრო ფენის არე და შესაბამისად დიდია გარე ნაკადის განფენილობა და პირიქით, სიბლანტის როლის გაზრდა იწვევს სასაზღვრო ფენის გასქელებას და გარე არის შემცირებას.

სასაზღვრო ფენაში სითხის დამუხრუჭების გამო დენის მიღები ფართოვდება, დენის წირები წანაცვლდებიან და გარე ნაკადს ავიწროვებენ.

როდესაც სითხე გარს ედინება მასში ჩადირულ უძრავ სხეულს, ხდება სითხის ნულოვანი სიჩქარიდან, რომელიც სითხის სხეულზე მიკვრით არის განპირობებული, გადასვლა გარე ნაკადის სიჩქარეში. ეს გადასვლა წარმოებს

სხეულის ზედაპირის მახლობელ არეში – სასაზღვრო ფენაში. რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის სასაზღვრო ფენის სისქე ძალზე მცირეა ნაკადის გასწვრივ ზომებთან შედარებით.

განასხვავებენ ლამინარულ და ტურბულენტურ სასაზღვრო ფენს, იმის მიხედვით, თუ როგორია მასში დინების ლამინარული თუ ტურბულენტური რეჟიმი. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ლამინარულ სასაზღვრო ფენს.

განვიხილოთ არანიუტონისეულ სითხეებში სასაზღვრო ფენის იდეის გამოყენების შესაძლებლობა.

ფსევდოპლასტიკურ და დილატანტურ სითხეებზე სასაზღვრო ფენის იდეის გავრცელებასთან საჭიროა ფრთხილი მიდგომა. წარმოვიდგინოთ ანომალური – ბლანტი სითხე, რომლისთვისაც ხახუნის დამაბულობა სუსტად ან ძალიან სუსტადაა დამოკიდებული ძვრის სიჩქარეზე (ხარისხოვან კანონში n – ის მცირე მნიშვნელობები). მაშინ ცხადია არავითარი საკმაოდ მკვეთრი არე სიბლანტის გადაჭარბებული ძალებით არ იარსებებს და სასაზღვრო ფენის ჰიპოთეზა კარგავს აზრს. სასაზღვრო ფენი გაისლება დინების მთელ არეზე. ხარისხოვან კანონზე აგებულ სასაზღვრო ფენის მიღებისას, საჭიროა ყოველთვის მხედველობაში გვქონდეს მისი პრინციპული შეუძლებლობა იმ გარემოთა შემთხვევაში, რომელნიც ძვრისას ავლენენ მნიშვნელოვან ელასტიურ (დრეკად) თვისებებს.

ასევე უნდა მოივუთითოთ ხარისხოვანი კანონის წმინდა მათემატიკურ ხარვეზებზეც. ხარისხოვანი კანონი ზღუდავს მისი გამოყენების არეს სასაზღვრო ფენის თეორიაში. ეფექტური სიბლანტე

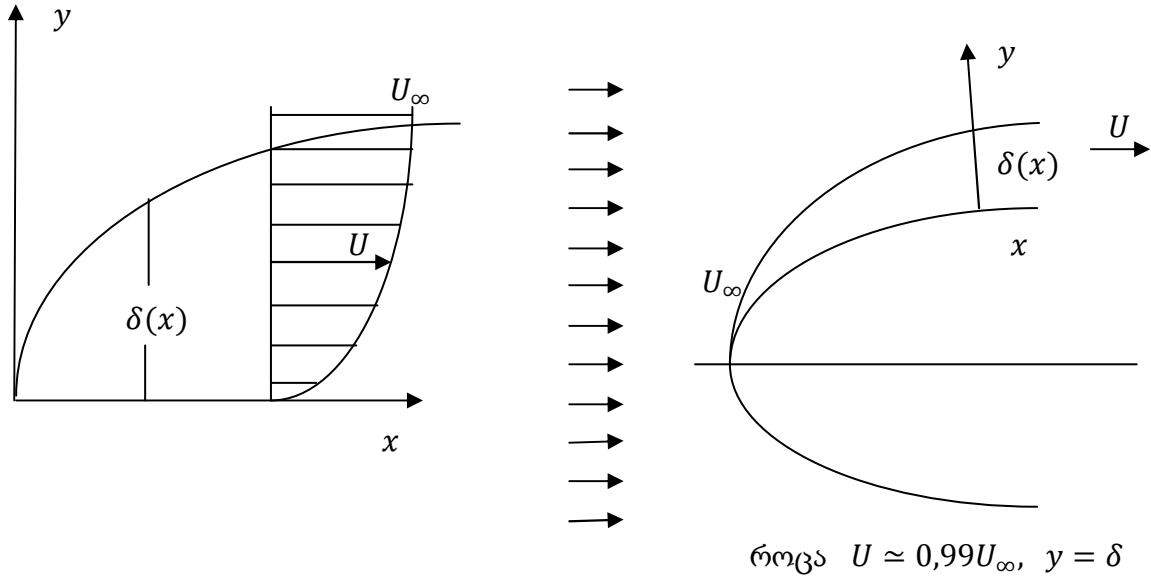
$$\mu_{eff} = k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{lm} \dot{e}_{ml} \right|^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.1)$$

ძვრის მცირე სიჩქარეებისას მიისწრაფის ნულისაკენ ყველა დილატანტური სითხისათვის ($n > 1$) და უსასრულობისაკენ ყველა ფსევდოპლასტიკურისათვის ($n < 1$). თუმცა ცდებში ასეთი უკიდურესობანი არ დაიკვირვება. ამიტომ, ალბათ, არ შეიძლება დავუჯეროთ შედეგებს, რომელნიც მიიღება სასაზღვრო ფენის გარე საზღვრის მახლობლად წინა კრიტიკული წერტილის უშუალო მახლობლობაში, ე. ი. იქ სადაც $\dot{e}_{ij} \approx 0$. ანალოგიური სირთულე წარმოიქმნება ასევე ძვრის ძალიან დიდისიჩქარეებისათვისაც.

ზოგიერთ გართულებას იწვევს ის გარემოება, რომ ძნელია ძვრის სიჩქარეთა ფართო დიაპაზონში ვისარგებლოთ ერთი და იგივე n და k პარამეტრებით. მაგრამ ეს უფრო რაღაც არამოხერხებულობაა, ვიდრე არსებითი სირთულე, რამდენადაც პრაქტიკაში ძვრის სიჩქარეთა დიაპაზონი ყოველთვის შეზღუდულია და ზღვრულ შემთხვევაში შეიძლება პარამეტრთა ეფექტური მნიშვნელობებით სარგებლობა.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ვახდენთ სასაზღვრო ფენის სისქის შეფასებას, იმ შემთხვევაში, როდესაც სხეულის გარსდენა უწყვეტია. საგულისხმოა, რომ სასაზღვრო ფენის სისქის ცნება რამდენადმე პირობითია, რადგან სასაზღვრო ფენში სითხის სიჩქარე ასიმპტოტურად უახლოვდება გარე ნაკადის სიჩქარეს. იმისათვის რომ ამ ცნებას მივცეთ განმარტება, სასაზღვრო ფენის სისქე ვუწოდოთ გარსმოდენადი ზედაპირიდან ისეთ დაშორებას

(მანძილს), რომელშიც სითხის სიჩქარე განსხვავდება გარე ნაკადის სიჩქარისაგან რაიმე მოცემული სიდიდით, მაგალითად 1% – ით (ნახ. 2).



ნახ. 2

განვიხილოთ არანიუტონისეული არაკუმშვადი ელექტროგამტარი სითხის დინება ბრტყელ სასაზღვრო ფენში ელექტრომაგნიტური ველის არსებობისას, როდესაც მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი $\vec{B}$ მართობულია ზედაპირისა, რომელზეც არის სასაზღვრო ფენი, ელექტრული ველის დამაბულობა $\vec{E}$ მართობულია $\vec{B}$ ვექტორის და სასაზღვრო ფენის გასწვრივი სიჩქარის მიმართულების. თუ x კოორდინატი მიმართულია გარსმოდენადი ზედაპირის გასწვრივ, y – ზედაპირის მართობულად, ხოლო z – დინების სიბრტყის მართობულად, მაშინ $\vec{E} \equiv (0, 0, E)$, $\vec{B} = (0, B_0, 0)$. ხარისხოვანი სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებათა სისტემა არაინდუქციურ მიახლოებაში მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u - \frac{\sigma B}{\rho} E \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{k}{\rho C_p} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n+1} \sigma B^2 u^2, \quad (2.3)$$

აქ u და v არიან სასაზღვრო ფენში სიჩქარის მდგენელები.

§3. საწყისი და სასაზღვრო პირობები

გავარკვეოთ როგორ საწყის და სასაზღვრო პირობებში საჭიროებს ინტეგრებას ხარისხოვანი რეოლოგიური სითხეების სასაზღვრო ფენის განტოლებები. განიხილება ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენი.

უძრავ არაგამტარ მყარ $y = 0$ საზღვარზე, როგორც ექსპერიმენტები გვიჩვენებენ ბევრი ერთფაზიანი არანიუტონისეული სითხისათვის სამართლიანია ზედაპირზე სითხის მიკვრის კლასიკური პირობები

$$u(x, 0, z, t) = v(x, 0, z, t) = w(x, 0, z, t) = 0 \quad (3.1)$$

ეს დაშვება ყოველთვის არ სრულდება. საქმე იმაშია, რომ მყარ ზედაპირს შეუძლია ხელი შეუწყოს ნის მახლობლად მოლეკულებისა და სითხის ნაწილაკების მნიშვნელოვან ორიენტირებას. ამასთან ზედაპირის გასწვრივ წარმოიქმნება გასრიალების მახასიათებელი ქმედება. ასეთი მოვლენები განსაკუთრებით კარგად დაიკვირვებიან მრავალფაზიან სისტემებში. მაგალითად, ქაღალდის მასის სუსპენზიიდან დინებისას გამჭვირვალე მილში მკაფიოდ ჩანს კედლის მახლობლად წყლის რგოლები. ცნობილია ასევე, რომ ნიუტონისეულ გაზებშიც მიკვრას არ აგვს ადგილი დაბალი წნევებისას. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ სითხეებს, რომელთათვისაც მყარი ზედაპირის მახლობლობაში სრიალი შეიძლება უგულებელყოფილი იქნეს.

საზოგადოდ მოძრავ გამჭოლ ზედაპირზე სასაზღვრო პირობები მოიცემა შემდეგი სახით:

$$u = u_0(x, z, t), \quad v = v_0(x, z, t), \quad w = w_0(x, z, t). \quad (3.2)$$

გადავიდეთ სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე სასაზღვრო პირობებზე.

ფიზიკურად სასაზღვრო ფენის იდეა ეფუძნება იმას, რომ სიბლანტის ძალების გავლენა აისახება მხოლოდ გამყოფი (მყარი, თხევადი) ზედაპირის სიახლოვეს თხელ არეში. მის გარეთ მოძრავი სითხე შეიძლება ჩაითვალოს იდეალურად. სხვა სიტყვებით, სასაზღვრო ფენის სხეულის ზედაპირის მართობული კვეთის ყველა წერტილში წნევას გააჩნია ერთი და იგივე მნიშვნელობა. ამასთან სასაზღვრო ფენი არსებობს, თუ ფენის ნებისმიერ წერტილში სიჩქარის ზედაპირის ნორმალური მდგენელები ბევრად მცირეა გასწვრივზე. ე. ი. სასაზღვრო ფენის არეში სიჩქარეს გააჩნია იგივე არდობითი რიგი, როგორც ფენის სისქეს. ამიტომ სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე სამართლიანია იდეალური სითხის განტოლებები, რომლებშიც $V \frac{\partial V}{\partial y}$, $V \frac{\partial W}{\partial y}$

წევრები შეგვიძლია უგულებელვყოთ:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \\ & -\frac{\partial p}{\partial x} - MB_x B_z W - M(B_y^2 + B_z^2)U + Mk(E_y B_z - E_z B_y), \\ & \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = \\ & -\frac{\partial p}{\partial z} - MB_x B_z U - M(B_x^2 + B_y^2)W + Mk(E_x B_y - E_y B_z), \\ & \frac{\partial p}{\partial y} = Mk(E_z B_x - E_x B_z) - MB_y(B_x U - B_z W), \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$U = \lim_{y \rightarrow \infty} u, \quad W = \lim_{y \rightarrow \infty} w. \quad (3.4)$$

თუ ჩვენ გვეცოდინება სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზეწნევის განაწილება, მაშინ (4.3) – ის ამოხსნით შევძლებდით U და W სიდიდეების პოვნას. (2.30) – დან გამომდინარეობს, რომ სასაზღვრო ფენის განივი მიმართულებით წნევა მუდმივია. მაშასადამე, საკმარისია ექსპერიმენტულად გავზომოთ წნევის განაწილება გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე, რომ ის ვიცოდეთ სასაზღვრო ფენის ნებისმიერ წერტილში, მათ შორის გარე საზღვარზე.

ამგვარად სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე საძიებელი სასაზღვრო პირობები მოიძებნება (4.3) განტოლებების ამოხსნით, რომლებშიც $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$

გამოითვლება გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე ექსპერიმენტულად გაზომილი წნევის განაწილების მიხედვით.

დინამიკური სასაზღვრო ფენის სასაზღვრო ამოცანის უფრო კორექტულად დასმისათვის აუცილებელია ასევე საწყის კვეთებში მოცემული იყოს სიჩქარის მხები (გასწვრივი) და ტრანსვერსიალური მდგენელები საწყის $x = x_0$ და $z = z_0$ კვეთებში:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_0, y, z, t), & w_1 &= w(x_0, y, z, t), \\ u_2 &= u(x, y, z_0, t), & w_2 &= w(x, y, z_0, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

მიღებულ განტოლებათა სისიტემაში სიჩქარის ნორმალური მდგენელისათვის გვაქვს მხოლოდ ერთი სასაზღვრო პირობა, რომლის როლშიც საზოგადოდ იღებენ სასაზღვრო პირობას გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე.

არამდგრადი მოძრაობისას მოცემული უნდა იყოს კიდევ დროის საწყის მომენტში სიჩქარის მხები და ტრანსვერსიალური მდგენელები:

$$u_3 = u(x, y, z, t_0); \quad w_3 = w(x, y, z, t_0). \quad (3.6)$$

განვიხილოთ საწყისი და სასაზღვრო პირობები სითბური სასაზღვრო ფენის განტოლებებისათვის. გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე შეიძლება

მოცემული იყოს არა მხოლოდ მუდმივი ან ცვლადი ტემპერატურა, არამედ სითბოს ნაკადი:

$$T_0 = T(x, 0, z, t), \quad q_0 = q(x, 0, z, t). \quad (3.7)$$

სითბური სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე ტემპერატურა შეიძლება იყოს მუდმივი ან მოცემული რაიმე კანონით:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T = T_\infty(x, z, t) \quad (3.8)$$

და ბოლოს აუცილებელია მივუთითოთ ტემპერატურის პროფილი საწყის $x = x_0$ და $y = y_0$ კვეთებში:

$$T_1 = T(x_0, y, z, t), \quad T_2 = T(x, y, z_0, t). \quad (3.9)$$

არასტაციონარულ ამოცანებში, ამას გარდა, მხედველობაში უნდა მივიღოთ საწყისი პირობა, რომელიც გვამღებს დროის საწყის $t = t_0$ მომენტში ტემპერატურის განაწილებას:

$$T_3 = T(x, y, z, t_0) \quad (3.10)$$

ამასთანავე სასაზღვრო პირობებიც შეიძლება დამოკიდებულ იყოს დროზე. თუ განიხილება სასრული სისქის სასაზღვრო ფენი, მაშინ უსასრულოებაში სასაზღვრო პირობების ნაცვლად ავიღებთ პირობას

$$\lim_{y \rightarrow \delta(x, z, t)} u = u_\infty(x, z, t) \quad (3.11)$$

$$\lim_{y \rightarrow \delta(x, z, t)} w = w_\infty(x, z, t)$$

ხოლო უცნობი $\delta(x, z, t)$ სისქის განსასაზღვრავად მოვითხოვთ სასაზღვრო ფენიდან გარე ნაკადში სიჩქარის კომპონენტების უწყვეტად გადასვლის პირობები:

$$\lim_{y \rightarrow \delta(x, z, t)} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \delta(x, z, t)} \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.12)$$

ნაჩვენები სასაზღვრო და საწყისი პირობები სამართლიანია ასევე ჭავჭავაძის და თავისუფალი კონვექციის ამოცანებისათვის, მაგრამ მაშინ გარე საზღვარზე აუცილებელია ჩაითვალოს სითბო უძრავად.

§4. ბლანტი გამტარი სითხის სტაციონარული სასაზღვრო ფენის მიახლოებითი ამოხსნის ინტეგრალური მეთოდი

განიხილება სტაციონარული სასაზღვრო ფენი არანიუტონისეული სითხისა, რომლის ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი მუდმივია $\sigma = \sigma_0$; გარე ნაკადის სიჩქარეა U_∞ . გარე მაგნიტური ველის ინდუქცია – B . B_0 -ით ავლნიშნოთ B -ს გეგმილი y ღერძზე. სასაზღვრო ფენის განტოლებანი არიან:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{nk}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} - \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho} u, \quad (4.1)$$

$$U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma_\infty B_0^2}{\rho} U_\infty, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.3)$$

ჩავთვალოთ, რომ $U_\infty \neq const$ და ის x -ის ფუნქციაა. დავადგინოთ როგორი სახე ექნება კარმანის ინტეგრალურ თანაფარდობას. ამისათვის უწყვეტობის განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial u U_\infty}{\partial x} + \frac{\partial U_\infty v}{\partial y} = u \frac{\partial U_\infty}{\partial x}, \quad (4.4)$$

რაც მოძრაობის განტოლებასთან ერთად მოგვცემს შემდეგ თანაფარდობას

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(U_\infty - u) + \frac{\partial}{\partial y} v(U_\infty - u) + \frac{\partial U_\infty}{\partial x} (U_\infty - u) = \\ = -\frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n - \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho} U_\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

ავიღოთ (4.5)-ის ინტეგრალი და გავითვალისწინოთ გამოდევნისა და იმპულსის დაკარგვის სისქეთა გამოსახულებანი:

$$\delta^* = \int_0^{\delta, \infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy, \quad (4.6)$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta, \infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy, \quad (4.7)$$

მაშინ (4.5)-დან მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx}(U_\infty^2 \delta^{**}) - U_\infty V_W + U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \delta^* = \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \Big|_{y=0} - N_0 \delta^* U_\infty, \quad (4.8)$$

სადაც $N_0 = \sigma_0 B_0^2 / \rho$, ხოლო V_W არის კონტურში გაჟონვის სიჩქარე. y ღერძი მდებარეობს კონტურის მართობულად. თუ ჩავთვლით, რომ σ ელექტროგამტარებლობა არაა მუდმივი და მისთვის ავიღებთ გამოსახულებას

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right), \quad (4.9)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\sigma_\infty = 0$, მაშინ (1.3.8) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} U_\infty^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + 2U_\infty \delta^{**} \frac{dU_\infty}{dx} - U_\infty V_W + U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \delta^* = \\ = \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \Big|_{y=0} - N_0(a\delta^* - b\delta^{**})U_\infty. \end{aligned} \quad (4.10)$$

თუ $a = 1$ და $b = 0$, გვექნება კლასიკური ამოცანის მოდელი, რომელიც ეთანადება მუდმივი გამტარებლობის შემთხვევას, ხოლო თუ $a = 0$ და $b = 1$, ელექტროგამტარებლობა იქნება ცვალებადი. (4.10) არის კარმანის ინტეგრალური განტოლება სითხისათვის კონვექციის გარეშე ნებისმიერი მრუდწირული კონტურის შემთხვევაში. როცა $U_\infty = const$, მაშინ გვაქვს ბრტყელი კედელი. დავუშვათ გაჟონვის სიჩქარე $V_W = 0$, მაშინ (4.10)-დან გვექნება:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{N_0}{U_\infty} (a\delta^* - b\delta^{**}) = \frac{k}{U_\infty^2 \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \Big|_{y=0}. \quad (4.11)$$

შემოვიტანოთ ავტომოდელური ცვლადი $\eta = \frac{y}{\delta}$ და სითხის სიჩქარე $u(y)$ ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u(y) = U_\infty f(\eta), \quad (4.12)$$

მაშინ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_\infty}{\delta} f', \quad (4.13)$$

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-f) d\eta, \quad (4.14)$$

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 f (1-f) d\eta, \quad (4.15)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$A \equiv \int_0^1 (1-f) d\eta, \quad (4.16)$$

$$B \equiv \int_0^1 f (1-f) d\eta, \quad (4.17)$$

(4.16) და (4.17) შევიტანოთ (4.11)-ში და გავამრავლოთ δ^n -ზე, მოვიღებთ:

$$B\delta^n \frac{d\delta}{dx} + \frac{N_0}{U_\infty} (aA + bB)\delta^{n+1} = \frac{kU_\infty^{n-2}}{\rho} [f'(0)]^n. \quad (4.18)$$

თუ δ^n -ს, შევიტანოთ წარმოებულის ნიშნის ქვეშ მივიღებთ

$$\frac{B}{n+1} \frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0}{U_\infty} (aA + bB)\delta^{n+1} = \frac{kU_\infty^{n-2}}{\rho} [f'(0)]^n. \quad (4.19)$$

ამოვხსვათ ამოცანა რამოდენიმე კონკრეტულ შემთხვევაში. ამისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$I. \quad u|_{y=0} = 0, \quad \Rightarrow \quad f|_{\eta=0} = 0.$$

$$II. \quad u|_{y=\delta} = U_\infty, \quad \Rightarrow \quad f|_{\eta=1} = 1.$$

$$III. \quad \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \Rightarrow \quad f'|_{\eta=1} = 0.$$

IV. მეოთხე პირობად აიღება

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty U_\infty' + \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n + N_0 U_\infty \left[a \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) - b \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) \frac{u}{U_\infty} \right]$$

მოძრაობის განტოლების გამოსახულება $y = 0$ -ზე:

$$-V_W \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = U_\infty U_\infty' + \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n_{y=0} + N_0 U_\infty a. \quad (4.20)$$

თუ გაჟონვა არ გვაქვს ($V_W = 0$) და თუ $U_\infty = \text{const}$, მაშინ გვექნება

$$\frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0} + N_0 U_\infty a = 0. \quad (4.21)$$

გადავიდეთ (4.21)-ში ავტომოდელურ ცვლადზე, რის შემდეგაც ის მიიღებს სახეს:

$$\frac{U_\infty^{n-1} n}{\delta^{n+1}} \frac{k}{\rho} (f')^{n-1} f'' \Big|_{\eta=0} + \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho} a = 0, \quad (4.22)$$

ხოლო თუ $U_\infty \neq \text{const}$, გვექნება:

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{U_\infty^n n}{\delta^{n+1}} \frac{k}{\rho} (f')^{n-1} f'' \Big|_{\eta=0} + \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho} U_\infty a = 0. \quad (4.23)$$

V. მეხუთე სასაზღვრო პირობად აიღება მოძრაობის განტოლების წარმოებული $y = 0$ -ზე, რომელიც უწყვეტობის განტოლების გათვალისწინებით მოგვცემს:

$$-V_W \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0} - N_0 a \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - N_0 b \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (4.24)$$

თუ არ გვაქვს გაჟონვა

$$\frac{k}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0} - N_0 a \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - N_0 b \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (4.25)$$

თუ (4.25)-ში გადავალთ ავტომოდელურ ცვლადზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{nk}{\rho} \frac{U_\infty^n}{\delta^{n+2}} [(n-1)(f')^{n-2}(f'')^2 + (f')^{n-1}f'''] \Big|_{\eta=0} \\ - N_0 a \frac{U_\infty}{\delta} f' \Big|_{\eta=0} - N_0 b f' \Big|_{\eta=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.26) წარმოადგენს V სასაზღვრო პირობას, როდესაც $V_W = 0$, ნებისმიერი U_∞ -ს შემთხვევაში.

VI. მეექვსე პირობად აღებულია

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=\delta} = 0, \quad \text{ი. ი.} \quad f'' \Big|_{\eta=1} = 0. \quad (4.27)$$

VII. მეშვიდე სასაზღვრო პირობას წარმოადგენს:

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \text{ე. ი. } f'''|_{\eta=1} = 0. \quad (4.28)$$

ამოვხსნათ ამოცანა რამოდენიმე კონკრეტულ შემთხვევაში:

1) $f(\eta)$ ფუნქცია წრფივია თავისი არგუმენტის მიმართ, ე. ი.

$$f(\eta) = a_1 + a_2 \eta \quad (4.29)$$

სადაც a_1 და a_2 რაიმე მუდმივებია. მათ მოსაძებნათ გამოვიყენოთ I და II პირობები. მივიღებთ, რომ $a_1 = 0$ და $a_2 = 1$, ხოლო

$$f(\eta) = \eta, \quad u = U_\infty \frac{y}{\delta}. \quad (4.30)$$

(4.16) – დან და (4.17) – დან მივიღებთ, რომ $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$. ხოლო (4.19) – დან δ – სთვის გვექნება განტოლება

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0(n+1)(3a+b)}{U_\infty} \delta^{n+1} = 6(n+1)U_\infty^{n-2} \frac{k}{\rho} \quad (4.31)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\delta = 0$, როცა $x = 0$, მაშინ (4.31) – ის ამონახსნს ექნება სახე

$$\delta = \left[\frac{6U_\infty^{n-1}k}{N_0\rho(3a+b)} \left(1 - e^{-\frac{(n+1)(3a+b)N_0}{U_\infty}x} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.32)$$

ზედაპირული ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$\tau = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{U_\infty}{\delta} f'|_{\eta=0} = \frac{U_\infty}{\delta} \quad (4.33)$$

2) $f(\eta)$ კვადრატული ფუნქციაა:

$$f(\eta) = a_1 + a_2 \eta + a_3 \eta^2 \quad (4.34)$$

I, II და III სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით a_1 , a_2 და a_3 კოეფიციენტებისთვის მივიღებთ:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = -1,$$

ხოლო $f(\eta)$ ფუნქციას ექნება სახე

$$f(\eta) = 2\eta - \eta^2 \quad (4.35)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$u = U_{\infty} \left(2 \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad (4.36)$$

(4.16)–დან და (4.17)–დან გამომდინარე A -სა და B -სთვის მივიღებთ:

$$A = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{2}{15},$$

ხოლო სასაზღვრო ფენის სისქისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0(5a+2b)}{2U_{\infty}} \delta^{n+1} = \frac{15(n+1)kU_{\infty}^{n-2}}{\rho}, \quad (4.37)$$

ხოლო (4.37)–ის ამონახსნს $\delta|_{x=0} = 0$ პირობის გათვალისწინებით ექნება სახე:

$$\delta(x) = \left(U_{\infty}^{n-1} \frac{30(n+1)k}{N_0(5a+2b)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(1 - e^{-\frac{N_0(5a+2b)}{2U_{\infty}}x} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (4.38)$$

ზედაპირული ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$\tau = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{U_{\infty}}{\delta} f' \Big|_{\eta=0} = \frac{2U_{\infty}}{\delta} \quad (4.39)$$

$$3) \quad f(\eta) = a_1 + a_2\eta + a_3\eta^2 + a_4\eta^3 \quad (4.40)$$

a_1 , a_2 , a_3 და a_4 კოეფიციენტებისთვის I, II, III და IV სასაზღვრო პირობების გამოყენებით მივიღებთ

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -3, \quad a_4 = 1,$$

ხოლო $f(\eta)$ ფუნქციას ექნება სახე

$$f(\eta) = 3\eta - 3\eta^2 + \eta^3. \quad (4.41)$$

თუ $B_0 = 0$, ანუ გარე მაგნიტური ველი არ არსებობს, მაშინ IV პირობიდან მივიღებთ

$$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - 3\eta^2.$$

(4.16)–დან და (4.17)–დან მივიღებთ

$$A = \int_0^1 (1-f)d\eta = \frac{1}{4}; \quad B = \int_0^1 f(1-f)d\eta = \frac{3}{28},$$

ხოლო $\delta(x)$ -ისთვის გვექნება განტოლება

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0(7a+3b)}{3U_\infty} \delta^{n+1} = \frac{k \cdot 3^n U_\infty^{n-2}}{\rho}, \quad (4.42)$$

რაც $\delta|_{x=0} = 0$ სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მოგვცემს ამონახსნს:

$$\delta(x) = \left[\frac{k \cdot 3^n U_\infty^{n-1}}{N_0(7a+3b)(n+1)} \left(1 - e^{-\frac{N_0(7a+3b)(n+1)}{3U_\infty} x} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.43)$$

ზედაპირული ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$\tau = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{U_\infty}{\delta} f' \Big|_{\eta=0} = \frac{3U_\infty}{\delta} \quad (4.44)$$

$$4) \quad f(\eta) = a_1 + a_2\eta + a_3\eta^2 + a_4\eta^3 + a_5\eta^4. \quad (4.45)$$

I, II, III, IV, V, VI სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ კოეფიციენტების შემდეგ მნიშვნელობებს

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = -6, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = -1,$$

ხოლო $f(\eta)$ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე

$$f(\eta) = 4\eta - 6\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4. \quad (4.46)$$

A და B სიდიდეების განსაზღვრის შემდეგ (4.19)-დან δ -სთვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0(n+1)(9a+14b)}{14U_\infty} \delta^{n+1} = \frac{45(n+1) \cdot 4^n \cdot U_\infty^{n-2}}{14\rho}, \quad (4.47)$$

რაც $\delta|_{x=0} = 0$ სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მოგვცემს ამონახსნს

$$\delta(x) = \left[\frac{45 \cdot 4^{n+1} k U_\infty^{n-1}}{N_0(9a+14b)} \left(1 - e^{-\frac{N_0(9a+14b)(n+1)}{14U_\infty} x} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.48)$$

ზედაპირული ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$\tau = \frac{4U_\infty}{\delta}. \quad (4.49)$$

$$5) \quad f(\eta) = a_1 + a_2\eta + a_3\eta^2 + a_4\eta^3 + a_5\eta^4 + a_6\eta^5 + a_7\eta^6 \quad (4.50)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(\eta)$ ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმომავლის მნიშვნელობა $\eta = 1$ მნიშვნელობისათვის ტოლია ნულის. $a_1, a_2, \dots, a_7$ კოეფიციენტების განსაზღვრის შემდეგ (4.50) მიიღებს სახეს:

$$f(\eta) = 6\eta - 15\eta^2 + 20\eta^3 - 15\eta^4 + 6\eta^5 - \eta^6. \quad (4.51)$$

A -სა და B -ს განსაზღვრის შემდეგ $\delta(x)$ -სათვის მივიღებთ:

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0(n+1)(13a+6b)}{6U_\infty} \delta^{n+1} = \frac{91k(n+1) \cdot 6^{n-1} \cdot U_\infty^{n-2}}{\rho}, \quad (4.52)$$

რომლის ამონახსნს $\delta|_{x=0} = 0$ პირობის ძალით ექნება სახე:

$$\delta(x) = \left[\frac{91 \cdot 6^n k U_\infty^{n-1}}{N_0 \rho (13a+6b)} \left(1 - e^{-\frac{N_0(13a+6b)(n+1)}{6U_\infty} x} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.53)$$

ზედაპირული ხახუნის ძალისათვის მივიღებთ

$$\tau = \frac{U_\infty}{\delta} f' \Big|_{\eta=0} = \frac{6U_\infty}{\delta} \quad (4.54)$$

6) დავუშვათ, რომ $f(\eta)$ არის ჰარმონიული ფუნქცია:

$$f(\eta) = \sin \frac{\pi}{2} \eta. \quad (4.55)$$

ადვილა შემოწმება, რომ I, II, და III სასაზღვრო პირობები კმაყოფილდება. ვიპოვოთ A და B .

$$A = \int_0^1 \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \eta \right) d\eta = 1 - \frac{2}{\pi};$$

$$B = \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} \eta - \sin^2 \frac{\pi}{2} \eta \right) d\eta = \frac{4-\pi}{2\pi},$$

δ -სთვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + \frac{N_0(n+1)(2a(\pi-2) + b(4-\pi))}{4-\pi} \delta^{n+1} = \frac{2k\pi(n+1) \cdot U_\infty^{n-2}}{\rho(4-\pi)}, \quad (4.56)$$

(4.56)-ის ამონახსნს ექნება სახე

$$\delta(x) = \left[\frac{2k\pi U_\infty^{n-2}}{N_0\rho(13a+6b)} \left(1 - e^{-\frac{N_0(n+1)(2a(\pi-2)+b(4-\pi))}{4-\pi}x} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (4.57)$$

ზედაპირული ხახუნის ძალისათვის მივიღებთ

$$\tau = \frac{U_\infty}{\delta} f' \big|_{\eta=0} = \frac{\pi U_\infty}{2\delta}. \quad (4.58)$$

დასკვნა

ნაჩვენებია, რომ პარამეტრების შერჩევის გზით, რომელნიც განსაზღვრავენ არანიუტონისეული სითხის რეოლოგიას და მის ელექტროგამტარებლობას, შესაძლებელია ვმართოთ ზედაპირული ხახუნი.

მიღებულია გარემოს სუსტადელექტროგამტარებლობის პირობით ცვლადი გამტარებლობის არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექციის ამოცანის ავტომოდელური ამონახსნები ინტეგრალური მეთოდით.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движение сплошной среды. М. ГИТТЛ. 1955.
2. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П., Введение в космическую газодинамику. М. ГИФМЛ. 1958.
3. Голцын Г. С. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1958, Т. 30, N 2, стр. 382.
4. Каплан С. А., станюкович К. П., ДАН СССР, 1954, Т. 95.
5. Салтанов Н. В., Ткач В. С. Изб. АН СССР, ОН, 1961, 26.
6. Джумкулов Т. Магнитная гидродинамика, 1969, N3, стр 134-137.
7. Голцын Г. С., станюкович К. П. Магнитная гидродинамика, 1958.
8. Шулман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских Жидкостей. Минск 1966.