უნივერსიტეტის დასახელება და შესრულების ადგილი

ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი, სახელი და გვარი

მათემატიკის მაგისტრი

გიორგი ტეფნაძე

სამაგისტრო ნაშრომის სახელწოდება

ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების ნორლუნდის საშუალოების შესახებ

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება

მათემატიკა

ხელმძღვანელი

მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი:

უშანგი გოგინავა

2013 წ.

სარჩევი

ანოტაცია

annotation

ჩვენ შევისწავლით მონოტონური კოეფიციენტების მქონე ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორისთვის (H_p, L_p) და $(H_p, weak-L_p)$ ტიპის უტოლობებს ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშ-ფურიეს და კაჩმაჟ-ფურიეს სისტემების მიმართ. ჩვენ ასევე გამოვიყენებთ მიღებულ შედეგებს იგივე ტიპის ნორლუნდის საშუალოების თ.ყ კრებადობის საკითხების დასადგენად.

The main aim of this paper is to investigate (H_p, L_p) and $(H_p, weak-L_p)$ type inequalities of the maximal operators of Nörlund means with monotone coefficients, with respect one and two dimensional Walsh-Fourier and Kachzmaz-Fourier systems. We also use our result to prove a.e convergence of such Nörlund means.

შესავალი

უოლშის სისტემისთვის ერთგანზომილებიან შემთხვევაში L_1 კლასის ფუნქციის ფეიერის საშუალოების თ.ყ კრებადობა დაამტკიცა $Fine$ -მა [1]. 1975 წელს $Schipp$ -მა [2] აჩვენა, რომ ფეიერის საშუალოების მაქსიმალურ ოპერატორს $\sigma^{*,w}$ −ს აქვს სუსტი-(1,1) ტიპი და (p, p) ტიპი, როცა p >1. შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი როცა p =1. მაგრამ $Fujii$ -მ [3] დაამტკიცა, რომ ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,w}$ შემოსაზღვრულია H_1 დან L_1. $Fujii$ -ს თეორემა განაზოგადა $Weisz$ -მა [4]. მან დაამტკიცა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,w}$ შემოსაზღვრულია H_p -დან L_p -ში, როცა p >1/2. $Simon$ [5] ააგო მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შემოსაზღვრულობას არა აქვს ადგილი, როცა $0<p<1/2$. ანალოგიური შედეგი $p=1/2$ -თვის დაამტკიცა $Goginava$ -მ [6] (იხილეთ აგრეთვე [7]). $Goginava$ -მ [8] განაზოგადა ეს შედეგი და აჩვენა, რომ არსებობს მარტინგალი $f\in H_{1/2}$ ისეთი, რომ $\sup\limits_n \left\|\sigma_n^w f\right\|_{L_{1/2}}=\infty$.

$Weisz$ -მა [9] აჩვენა, რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა W1: უოლშ-ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,w}$ შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$ -დან weak- $L_{1/2}$ -ში.

ორგანზომილებიანი უოლშ-ფურიეს სისტემისთვის $Weisz$ -მა [10] დაამტკიცა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,*,w}$ შემოსაზღვრულია $H_p(G\times G)$-დან $L_p(G\times G)$-ში როცა $p>2/3$. $Goginava$ -მ [11] დაამტკიცა, რომ რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა W2: უოლშ-ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,*,w}$ შემოსაზღვრულია $H_{2/3}(G\times G)$-დან weak- $L_{2/3}(G\times G)$-ში.

$Goginava$ -მ [12] ასევე აჩვენა, რომ $\sigma^{*,*,w}$-ის შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი $H_{2/3}(G\times G)$-დან $L_{2/3}(G\times G)$-ში. საიდანაც ინტერპოლაციის საშუალებით დავადგენთ, რომ $\sigma^{*,*,w}$ არ არის შემოუსაზღვრელი $H_p(G\times G)$-დან weak- $L_p(G\times G)$, როცა $0<p<2/3$.

კაჩმაჟის სისტემისთვის ერთგანზომილებიან შემთხვევაში L_1 კლასის ფუნქციის ფეიერის საშუალოების თ.ყ კრებადობა დაამტკიცა Gát -მა [13]. მან აჩვენა,

რომ ფეიერის საშუალოების მაქსიმალურ ოპერატორს $\sigma^{*,\kappa}$ $-$ს აქვს სუსტი-(1,1) ტიპი და (p,p) ტიპი, როცა $p>1$. Gát -ის თეორემა განაზოგადა *Simon*-მა [14]. მან დაამტკიცა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,\kappa}$ შემოსაზღვრულია H_p-დან L_p-ში, როცა $p>1/2$. *Goginava*-მ და *Nagy*-მ [15] აჩვენეს, რომ შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი, როცა $p=1/2$. *Weisz*-მა [16] დაამტკიცა, რომ რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა K1: კაჩმაჟ-ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,\kappa}$ შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$-დან weak-$L_{1/2}$-ში.

ორგანზომილებიანი კაჩმაჟის სისტემისთვის *Goginava*-მ [17] დაამტკიცა, რომ რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა K2: კაჩმაჟ-ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{*,*,\kappa}$ შემოსაზღვრულია $H_{2/3}(G\times G)$-დან weak-$L_{2/3}(G\times G)$.

Goginava-მ [17] ასევე აჩვენა, რომ $\sigma^{*,*,\kappa}$ არის შემოსაზღვრული $H_{2/3}(G\times G)$-დან $L_{2/3}(G\times G)$-ში. საიდანაც ინტერპოლაციის გამოყენებით დავადგენთ, რომ $\sigma^{*,*,\kappa}$ არ არის შემოსაზღვრული $H_p(G\times G)$-დან weak-$L_p(G\times G)$, როცა $0<p<2/3$.

უოლშის სისტემისთვის ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ზოგიერთი ნორლუნდის საშუალოს L_1 ნორმით კრებადობის საკითხი განიხილეს *Moricz*-მა და *Siddiqi*-მა [18], ხოლო ორი ცვლადის შემთხვევაში კი *Nagy*-მ [19]. ნორლუნდის საშუალოს კერძო შემთხვევები ერთგანზომილებიან და ორგანზომილებიან შემთხვევებში უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების მიმართ განხილულია ასევე Gát-ის, *Goginava*-ს, *Nagy*-ის, *Weisz*-ის, J. Pál -ის, *Simon*-ის შრომებში (იხილეთ [20-27]).

ჩვენ შევისწავლით მონოტონური კოეფიციენტების მქონე ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორისთვის (H_p,L_p) და ($H_p, weak-L_p$) ტიპის უტოლობებს ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშ-ფურიეს და კაჩმაჟ-ფურიეს სისტემების მიმართ. ასევე განვიხილავთ იგივე ტიპის ნორლუნდის საშუალოების თ.ყ კრებადობის საკითხებს.

კერძოდ ჩვენ დავამტკიცებთ, ნორლუნდის საშუალოები ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშის და კაჩმარსკის სისტემების მიმართ, განსაზღვრული $\{q_n : n\geq 0\}$ არაუარყოფითი მიმდევრობით

$$t_n^{\beta} f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta=\kappa)$$

$$t_{n,n}^{\beta} f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_{k,k}^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n-1}}{Q_n} = 0,$$

საიდანაც კონკრეტულ შემთხვევაში, როცა $\{q_n : n \geq 0\}$ მიმდევრობა მონოტონურია, მივიღებთ t_n^{β} -ის და $t_{n,n}^{\beta}$ -ის რეგულარობას.

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში შვენ ვაჩვენებთ რომ ყოველი ნორლუნდის საშუალო

$$t_n^{\beta} f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$ და ყოველი ნორლუნდის საშუალო, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $q_0 / Q_n = O(1/n)$, მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,\beta} f = \sup_{n\in N}\left|t_n^{\beta} f\right|, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$ -დან სუსტ- $L_{1/2}$ -ში და არ არის შემოსაზღვრული H_p -დან $weak - L_p$ -ში, როცა $0 < p < 1/2$.

ორგანზომილებიან შემთხვევაში შვენ ვაჩვენებთ რომ ყოველი ნორლუნდის საშუალო

$$t_{n,n}^{\beta} f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_{k,k}^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$ და ყოველი ნორლუნდის საშუალო, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $q_0 / Q_n = O(1/n)$, მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,*\beta} f = \sup_{n\in N}\left|t_{n,n}^{\beta} f\right| \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

შემოსაზღვრულია $H_{2/3}$ -დან $L_{2/3}$ -ში და არ არის შემოსაზღვრული H_p -დან $weak - L_p$ -ში, როცა $0 < p < 2/3$.

განმარტებები და აღნიშვნები

N_+ $-$ით ავღნიშნოთ მთელი დადებით რიცხვების სიმრავლე, ხოლო $N-$ით მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე $N := N_+ \cup \{0\}$. განვიხილოთ დისკრეტული ორობითი ჯგუფი Z_2 :={0,1}, mod(2) შეკრების ოპერაციის მიმართ. Z_2-ზე გვაქვს ჰაარის ზომა, თითოეულ ელემენტის ზომა არის 1/2. G $-$თი ავღნიშნოთ ამ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი

$$G = \prod_{k=0}^{\infty} Z_2 \ .$$

G-ს ელემენტებს წარმოადგენს მიმდევრობები $x = (x_i, i \in N)$, სადაც $x_i = 0,1$, ($i \in N$). მოცემულ ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია განიმარტება, როგორც შესაბამისი კოორდინატების mod(2)-ით ჯამი. ზომა (აღნიშნული μ-თი) და ტოპოლოგია არის შესაბამისად ზომებისა და ტოპოლოგიების პირდაპირი ნამრავლი. G-ს ეწოდება უოლშის ჯგუფი. G-ს ქვესიმრავლეებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$I_0 := G, \quad I_n(x) := I_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) := \{y \in G : y = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1})\} \ \ x \in G, n \in N \ .$$

ამ სიმრავლეებს ეწოდებათ ორობითი ინტერვალები.

აღვნიშნოთ $I_n := I_n(0)$ და $\overline{I_n} := G \setminus I_n$, $\Lambda_n = (0,...,0, x_n = 1,0,...) \in G$, ($n \in N$).

ყოველი N-თვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, სადაც $n_i \in \{0,1\}$ და მხოლოდ n_i-ების სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან. თუ ავღნიშნავთ $|n| := \max\{ j \in N, n_j = 0\}$, მაშინ $2^{|n|} \le n < 2^{|n|+1}$.

ავღნიშნოთ $L_1(G)$-ით ჩვეულებრივი ერთგანზომილებიანი ლებეგის სივრცე.

განვმარტოთ k-ური რადემახარის ფუნქცია:

$$r_k(x) := (-1)^{x_k} \ , (k \in N \ , \ x \in G).$$

განვსაზღვროთ უოლშის სისტემა, როგორც

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_k} = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \quad (n \in N).$$

განვმარტოთ n-ური კაჩმაჟის ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\kappa_n(x) := \prod_{k=0}^{|n|-1} (r_{|n|-1-k}(x))^{n_k} = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-k-1}} \quad (n \in N).$$

სკვორცსოვმა მოგვცა კავშირი კაჩმაჟის ფუნქციებსა და უოლშის ფუნქციებს შორის შემდეგი გარდაქმნით

$$\tau_A(x) := (x_{A-1}, x_{A-2}, ..., x_0, x_A, x_{A+1}, ...),$$

სადაც $A \in N$. განმარტებით ჩვენ გვაქვს

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2^{|n|}}(\tau_n(x)), \qquad (n \in N, x \in G).$$

განვიხილოთ კერძო ჯამები უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების მიმართ

$$S^{\beta}{}_M(f) := \sum_{i=0}^{M-1} \hat{f}_{\beta}(i) \beta_i(x), \qquad (\beta_i = w_i \text{ ან } \beta_i = \kappa_i, \ (i \in N))$$

სადაც $\hat{f}_{\beta}(i)$ წარმოადგენს f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს i -ურ კოეფიციენტს შესაბამისად უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების მიმართ:

$$\hat{f}(i) := \int_G f(x) \beta_i(x) d\mu(x), \quad (\beta_i = w_i \text{ ან } \beta_i = \kappa_i, \ (i \in N))$$

ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$S_n^{\beta}(f(x)) = \int_G f(t) D_n^{\beta}(x+t) d\mu(t)$$

სადაც

$$D_n^{\beta} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k, \quad (\beta_i = w_i \text{ ან } \beta_i = \kappa_i, \ (i \in N))$$

დირიხლეს გული ეწოდება.

კარგადაა ცნობილი, რომ (იხილეთ 28)

(1) $$D_{2^n}^{w} = D_{2^n}^{\kappa} = D_{2^n} = \begin{cases} 2^n, x \in I_n, \\ 0, x \notin I_n. \end{cases}$$

განვიხილოთ p ხარისხსით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე $L_p(G)$ ნორმით

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \qquad (0< p < +\infty).$$

$weak$ - $L_p(G)$ სივრცე შეიცავს ზომად ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p} := \sup_{\lambda>0} \lambda \mu(|f| > \lambda)^{1/p} < +\infty, \qquad (0< p < +\infty).$$

$\sigma-$ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია 2^{-k} ზომის მქონე ორობითი ინტერვალებით I_k ავღნიშნოთ $F_k(k \in N)$-თი.

ავღნიშნოთ $f=\left(f^{(n)}, n \in N\right)$ -ით მარტინგალი $F_k(k \in N)$ ნაკადის მიმართ. f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^{*}=\sup_{n \in N}\left|f^{(n)}\right|.$$

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახითაც

$$f^{*}=\sup_{n \in N} \frac{1}{\mu(I_n(x))}\left|\int_{I_n(x)} f(u) d\mu(u)\right|.$$

ჰარდის მარტინგალების სივრცე $H_p(G)$ $(0< p<\infty)$ შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p}:=\left\|f^{*}\right\|_{L_p}<\infty.$$

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a -ს ეწოდება $p-$ატომი თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

$$\begin{cases} a) \int_G a d\mu=0, \\ b) \|a\|_{\infty} \leq \mu(I)^{-1/p}, \\ c) \sup p(a) \subset I. \end{cases}$$

$Weisz$ -მა $p-$ატომების საშუალებით მოგვცა $H_p(G)$ $(0<p \leq 1)$ სივრცეების ახალი დახასიათება:

თეორემა ($Weisz$) მარტინგალი $f=\left(f^{(n)}, n \in N\right)$ ეკუთვნის $H_p(G)$ $(0<p \leq 1)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ატომების მიმდევრობა $\left(a_k, k \in N\right)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $\left(\mu_k, k \in N\right)$ ისეთი რომ ყოველი $n \in N$ -თვის

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n}(a_k)=f^{(n)}, \tag{2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p<\infty.$$

უფრო მეტიც

$$\|f\|_{H_p} \approx \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო წარმოდგენებს შორის, რომელთაც აქვთ (2)-ს სახე.

ამ თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ოპერატორის შემოსაზღვრულობის საჩვენებლად $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში ან $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში საკმარისია შემოწმდეს შემოსაზღვრულობა მხოლოდ $p-$ატომებზე. უფრო მეტიც, სამართლიანია შემდეგი:

ვთქვათ T სუბწრფივი ოპერატორია და $0<p\le 1$თვის

$$\sup_{\rho>0}\rho^p\left\{x\in G\setminus I:|Ta|>\rho\right\}\le c_p<\infty,$$

ყოველი p ატომისთვის a, სადაც I აღნიშნავს a ატომის სუპორტს. თუ T შემოსაზღვრულია L_∞ დან L_∞ ში, მაშინ

$$\|Tf\|_{weak-L_p}\le c_p\|f\|_{H_p},$$

თუ დამატებით $p<1$, მაშინ T-ს აქვს სუსტი (1,1) ტიპი. ე.ი. თუ $f\in L_1$, მაშინ

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\ \mu\{|Ta|>\lambda\}\le c\|f\|_{L_1}.$$

თუ $f\in L_1(G)$, მაშინ $\left(S_{2^n}^{\beta}(f):n\in N\right)$ არის მარტინგალი.

$f=\left(f^{(n)},n\in N\right)$ მარტინგალისათვის უოლშ-ფურიეს და კაჩმაჟ-ფურიეს კოეფიციენტები განიმარტება შემდეგი განსხვავებული გზით:

$$\hat{f}(i):=\lim_{k\to\infty}\int_G f^{(k)}(x)\beta_i(x)d\mu(x),\quad (\beta_i=w_i \text{ ან } \beta_i=\kappa_i,\ (i\in N)).$$

$f\in L_1(G)$ ფუნქციის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები ემთხვევა $\left(S_{2^n}(f):n\in N\right)$ მარტინგალის შესაბამის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტებს.

ვთქვათ $\{q_n:n\ge 0\}$ არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობაა. f ფუნქციის n-ური ნორლუნდის საშუალო განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_{n-k}S_k^{\beta}f,\quad n\ge 1,$$

სადაც $Q_n:=\sum_{k=0}^{n-1}q_k$ და $\beta_i=w_i$ ან $\beta_i=\kappa_i$, $(i\in N)$.

დავუშვათ, რომ $q_0>0$ და $\lim_{n\to\infty}Q_n=\infty$. ამ შემთხვევაში (იხილე 29) ნორლუნდის საშუალოების მიმდევრობა უოლშის სისტემის მიმართ, განსაზღვრული $\{q_n\}$ არაუარყოფითი მიმდევრობით, რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n-1}}{Q_n}=0.$$

სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა

$$t_n^{\beta} f(x)=\int_G f(t)L_n^{\beta}(x+t)d\mu(t),\quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa)$$

სადაც

$$L_n^{\beta}:=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_{n-k}D_n^{\beta},\quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa)$$

არის ნორლუნდის გული.

თუ $q_k=1,$ ყველა $k\in N_+$-თვის მაშინ ჩვენ მივიღებთ ფეიერის საშუალო ($(C,1)$-საშუალო)

$$\sigma_n^{\beta} f:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k^{\beta} f,\quad n\in N_+,\ \sigma_0^{\beta} f:=0.$$

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას (იხილეთ [30]):

ვთქვათ, $A>t,\ t,A\in N$, $x\in I_t\setminus I_{t+1}$. მაშინ

$$K_{2^A}^{w}(x)=\begin{cases}0, x-x_t\Lambda_t\notin I_A,\\ 2^{t-1}, x-x_t\Lambda_t\in I_A.\end{cases}$$

ვთქვათ $x\in I_A$, მაშინ

$$K_{2^A}^{w}=2^{A-1}-1/2.$$

ასევე კარგადაა ცნობილი ფეიერის გულის შემდეგი შეფასებები:

(4) $$\left|K_{2^A}^{w}(x)\right|\le c\sum_{s=1}^{A}2^s 1_{I_A(\Lambda_s)}(x),$$

$$n\left|K_n^{w}(x)\right|\le c\sum_{s=1}^{|n|}2^s\left|K_{2^s}(x)\right|,$$

(5) $$\sup_{n\in N}\int_G\left|K_n^{w}(x)\right|d\mu(x)\le c<\infty$$

და

(6) $$n\left|K_n^{\kappa}(x)\right|=1+\sum_{i=0}^{|n|-1}2^i D_{2^i}(x)+\sum_{i=0}^{|n|-1}2^i r_i(x)K_{2^i}^{w}(\tau_i(x))$$
$$+\left(n-2^{|n|}\right)\left(D_{2^{|n|}}(x)+r_{|n|}(x)K_{n-2^{|n|}}^{w}\left(\tau_{|n|}(x)\right)\right).$$

უოლშ-ფურიეს და კაჩმაჟ-ფურიეს მწკრივის (C,α) $(0<\alpha<1)$ საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\sigma_n^{\alpha,\beta} f := \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_k^{\beta} f, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa, \quad n \in N)$$

სადაც

(7) $$A_0^{\alpha} = 0, \qquad A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}, \quad \alpha \neq -1,-2,\ldots$$

კარგადაა ცნობილი რომ

(8) $$A_n^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1},$$

$$A_n^{\alpha} - A_{n-1}^{\alpha} = A_n^{\alpha-1},$$

$$A_n^{\alpha} \approx n^{\alpha}.$$

ასევე განვიხილოთ შებრუნებული (C,α) $(0<\alpha<1)$ საშუალო:

$$\tau_n^{\beta} := \frac{1}{A^{\alpha}{}_n} \sum_{k=1}^{n} A_k^{\alpha-1} S_k^{\beta} f, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa, \quad n \in N).$$

თუ $q_k = 1/k,$ ჩვენ მივიღებთ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოს

$$R_n^{\beta} f := \frac{1}{l_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k^{\beta} f}{n-k}, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa, \quad n \in N)$$

სადაც

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

ასევე განვიხილოთ შებრუნებული R_n^{β} $(0<\alpha<1)$ საშუალო p_n^{β}, რომელიც ლიტერატურაში ცნობილია როგორც რისის საშუალო:

$$P_n^{\beta} f := \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k^{\beta} f}{k}, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa, \quad n \in N).$$

f მარტინგალისთვის განვიხილოთ შემდეგი მაქსიმალური ოპერატორები:

$$\sigma^{*,\beta} f := \sup_{n\in N} \left|\sigma_n^{\beta} f\right|,$$

$$\sigma^{\alpha,*,\beta} f := \sup_{n\in N} \left|\sigma_n^{\alpha,\beta} f\right|,$$

$$\tau^{\alpha,*,\beta} f := \sup_{n\in N} \left|\tau_n^{\alpha,\beta} f\right|,$$

$$R^{*,\beta} f := \sup_{n\in N} \left| R_n^{\beta} f \right|,$$

$$P^{*,\beta} f := \sup_{n\in N} \left| P_n^{\beta} f \right|,$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

განვიხილოთ p ხარისხსით ინტეგრებად ფუნქციათა ორგანზომილებიანი სივრცე $L_p(G\times G)$ ნორმით

$$\|f\|_{L_p(G\times G)} := \left(\int_{G\times G} \left| f(x_1,x_2)\right|^p d\mu(x_1,x_2) \right)^{1/p}, \quad (0< p < +\infty).$$

$weak$ - $L_p(G\times G)$ სივრცე შეიცავს ზომად ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p(G\times G)} := \sup_{\lambda>0} \lambda\ \mu(|f| > \lambda)^{1/p} < +\infty, \quad (0< p < +\infty).$$

$\sigma -$ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია ორგანზომილებიანი ორობითი ინტერვალებით $I_k(x_1)\times I_k(x_2)$, ზომით $2^k \times 2^k$ ავღნიშნოთ $F_{k,k}(k\in N)$-თი.

ავღნიშნოთ $f = \left(f^{(n,n)}, n\in N\right)$ -ით მარტინგალი $F_{k,k}(k\in N)$ ნაკადის მიმართ.

f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^{*,*} = \sup_{n\in N} \left| f^{(n,n)} \right|.$$

თუ $f \in L_1(G\times G)$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახითაც

$$f^{*,*} = \sup_{n\in N} \frac{1}{\mu(I_n(x_1)\times I_n(x_2))} \left| \int_{I_n(x_1)\times I_n(x_2)} f(u_1,u_2) d\mu(u_1,u_2) \right|.$$

ჰარდის მარტინგალების სივრცე $H_p(G\times G)$ $(0< p <\infty)$ შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p} := \left\| f^{*,*} \right\|_{L_p} < \infty.$$

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება $p-$ატომი თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი $I\times I$, ისეთი, რომ

$$\begin{cases} a)\int_{G\times G} a\, d\mu = 0, \\ b)\|a\|_{\infty} \le \mu(I\times I)^{-1/p}, \\ c)\sup p(a) \subset I\times I. \end{cases}$$

Weisz -მა $p-$ატომების საშუალებით მოგვცა $H_p(G\times G)$ ($0<p\le 1$) სივრცეების დახასიათება:

თეორემა (*Weisz*) მარტინგალი $f=\left(f^{(n,n)},n\in N\right)$ ეკუთვნის $H_p(G\times G)$ ($0<p\le 1$) მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ატომების მიმდევრობა $(a_k,k\in N)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $(\mu_k,k\in N)$ ისეთი რომ ყოველი $n\in N$ -თვის

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{2^n,2^n}(a_k)=f^{(n,n)},\\ &\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p<\infty.\end{aligned}\tag{9}$$

უფრო მეტიც

$$\|f\|_{H_p(G\times G)}\approx\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო წარმოდგენებს შორის, რომელთაც აქვთ (9)-ს სახე.

ამ თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ოპერატორის შემოსაზღვრულობის საჩვენებლად $H_p(G\times G)$-დან $H_p(G\times G)$-ში ან $H_p(G\times G)$-დან $L_p(G\times G)$-ში საკმარისია შევამოწმდეს ამ ოპერატორის შემოსაზღვრულობა მხოლოდ $p-$ატომებზე. უფრო მეტიც, სამართლიანია შემდეგი:

ვთქვათ T სუბწრფივი ოპერატორია და $0<p\le 1$თვის

$$\sup_{\rho>0}\rho^p\left\{x\in\times(G\times G)/(I\times I):|Ta|>\rho\right\}\le c_p<\infty,$$

ყოველი p -ატომისთვის a, სადაც $I\times I$ აღნიშნავს a ატომის სუპორტს. თუ T შემოსაზღვრულია $L_\infty(G\times G)$ -დან $L_\infty(G\times G)$ -ში, მაშინ

$$\|Tf\|_{weak-L_p(G\times G)}\le c_p\|f\|_{H_p(G\times G)},$$

თუ დამატებით $p<1$, მაშინ T -ს აქვს სუსტი (1,1) ტიპი. ე.ი. თუ $f\in L_1(G\times G)$, მაშინ

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\,\mu\{|Ta|>\lambda\}\le c\|f\|_{L_1(G\times G)}.$$

თუ $f\in L_1(G\times G)$, მაშინ $\left(S_{2^n,2^n}(f):n\in N\right)$ არის მარტინგალი.

$f=\left(f^{(n,n)},n\in N\right)$ მარტინგალისათვის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები განიმარტება შემდეგი განსხვავებული გზით:

$$\hat{f}(i,j):=\lim_{k\to\infty}\int_G f^{(k,k)}(x_1,x_2)\beta_i(x_1)\beta_j(x_2)d\mu(x_1,x_2),$$

$$(\beta_l = w_l \text{ ან } \beta_l=\kappa_l,\ (l\in N)).$$

$f\in L_1(G\times G)$ ფუნქციის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები ემთხვევა $\left(S_{2^n,2^n}(f):n\in N\right)$ მარტინგალის შესაბამის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტებს.

ვთქვათ $\{q_n : n\geq 0\}$ არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობაა. f ფუნქციის n-ური ნორლუნდის საშუალო განიმარტება შემდეგნაირად:

$$t^{\beta}_{n,n}:=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_{n-k}S^{\beta}_{k,k}f, \quad n\geq 1,$$

სადაც

$$Q_n:=\sum_{k=0}^{n-1}q_k, \qquad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa).$$

სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა

$$t^{\beta}_{n,n}f(x)=\int_G f(t)L^{\beta}_{n,n}(x+t)d\mu(t), \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa)$$

სადაც

$$L^{\beta}_{n,n}:=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_{n-k}D^{\beta}_{k,k}$$

არის ნორლუნდის გული.

თუ $q_k=1$, ყველა $k\in N$-თვის მაშინ ჩვენ მივიღებთ მარცინკევიჩის საშუალოს ($(C,1)$-საშუალო)

$$\sigma^{\beta}_{n,n}f:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S^{\beta}_{k,k}f, \quad \sigma^{\beta}_{0,0}f:=0, \ (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa, \quad n\in N_+)$$

უოლშ-ფურიეს და კაჩმაჟ-ფურიეს მწკრივის (C,α) $(0<\alpha<1)$ საშუალო განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\sigma^{\alpha,\beta}_{n,n}f:=\frac{1}{A^{\alpha}_n}\sum_{k=1}^{n}A^{\alpha-1}_{n-k}S^{\beta}_{k,k}f, \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa,\ n\in N)$$

სადაც

$$A^{\alpha}_0=0, \qquad A^{\alpha}_n=\frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}, \quad \alpha\neq -1,-2,\ldots$$

ასევე განვიხილოთ შებრუნებული (C,α) $(0<\alpha<1)$ საშუალო:

$$\tau_{n,n}^{\alpha,\beta} := \frac{1}{A^{\alpha}{}_{n}} \sum_{k=1}^{n} A_k^{\alpha-1} S_{k,k}^{\beta} f, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa,\ n \in N).$$

თუ $q_k = 1/k$, ჩვენ მივიღებთ ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოს

$$R_{n,n}^{\beta} f := \frac{1}{l_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_{k,k}^{\beta} f}{n-k}, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa,\ n \in N)$$

სადაც

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

ასევე განვიხილოთ შებრუნებული საშუალო $P_{n,n}^{\beta}$, რომელიც ლიტერატურაში ცნობილია როგორც რისის საშუალო:

$$P_{n,n}^{\beta} f := \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k,k}^{\beta} f}{k}, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa,\ n \in N).$$

f მარტინგალისთვის განვიხილოთ შემდეგი მაქსიმალური ოპერატორები:

$$\sigma^{*,*,\beta} f := \sup_{n \in N} \left|\sigma_{n,n}^{\beta} f\right|,$$

$$\sigma^{\alpha,*,*,\beta} f := \sup_{n \in N} \left|\sigma_{n,n}^{\alpha,\beta} f\right|,$$

$$\tau^{\alpha,*,*,\beta} f := \sup_{n \in N} \left|\tau_{n,n}^{\alpha,\beta} f\right|,$$

$$R^{*,*,\beta} f := \sup_{n \in N} \left|R_{n,n}^{\beta} f\right|$$

$$P^{*,*,\beta} f := \sup_{n \in N} \left|P_{n,n}^{\beta} f\right|,$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

ჩვენი შედეგების მისაღებად ასევე გვჭირდება აბელის გარდაქმნა: ნებისმიერი $a_1, a_2, ..., a_m$, $b_1, b_2, ..., b_m$, ნამდვილი რიცხვებისათვის სამართლიანია

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right)$$

ტოლობა, სადაც $a_k = A_k - A_{k-1}$, $k = n, ..., m.$

ძირითადი შედეგების ფორმულირება

(ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა 1. ა) ვთქვათ $q_0 > 0$ და $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty.$ ამ შემთხვევაში ნორლუნდის საშუალოების მიმდევრობა უოლშის და კაჩმარსკის სისტემების მიმართ, განსაზღვრული $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი მიმდევრობით

$$t_n^\beta f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k^\beta f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}}{Q_n} = 0.$$

ბ) ვთქვათ $\{q_n : n \geq 0\}$ მიმდევრობა მონოტონურია. მაშინ ნორლუნდის საშუალოების მიმდევრობა უოლშის და კაჩმარსკის სისტემების მიმართ, განსაზღვრული $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი მიმდევრობით

$$t_n^\beta f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k^\beta f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

რეგულარულია.

თეორემა 2. ა) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის

$$t_n^\beta f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k^\beta f, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,\beta} f = \sup_{n\in N} \left| t_n^\beta f \right| \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$-დან სუსტ-$L_{1/2}$-ში.

ბ) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_0}{Q_n}=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,\beta}f=\sup_{n\in N}\left|t_n^{\beta}f\right| \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa)$$

შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$-დან სუსტ-$L_{1/2}$-ში.

შედეგი 1. ა) ვთქვათ $f\in L_1(G)$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n\geq 0\}$,

$$\lim_{n\to\infty}t_n^{\beta}f=f \qquad \text{თ.ყ.} \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa).$$

ბ) ვთქვათ $f\in L_1(G)$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n\geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_0}{Q_n}=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}t_n^{\beta}f=f \qquad \text{თ.ყ.} \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa).$$

თეორემა 3. ა) ვთქვათ $0<p<1/2$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n\geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_0}{Q_n}\geq\frac{c}{n}$$

არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in N}\left\|t_n^{\beta}f\right\|_{weak-L_p}=\infty, \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa).$$

ბ) ვთქვათ $0<p<1/2$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n\geq 0\}$, არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in N}\left\|t_n^{\beta}f\right\|_{weak-L_p}=\infty, \quad (\beta=w \text{ ან } \beta=\kappa).$$

თეორემა 4. ა) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n\geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{q_0 n\log^2 n}{Q_n}=\infty,$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,\beta} f = \sup_{n\in N} \left| t_n^{\beta} f \right|, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

არ არის შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$-დან $L_{1/2}$-ში.

ბ) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელებიც ამაყოფილებენ პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{q_{n-1} n \log^2 n}{Q_n} = \infty,$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,\beta} f = \sup_{n\in N} \left| t_n^{\beta} f \right|, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

არ არის შემოსაზღვრული $H_{1/2}$-დან $L_{1/2}$-ში.

შედეგი 2. შემდეგი მაქსიმალური ოპერატორები $\sigma^{*,\beta}$, $\sigma^{\alpha,*,\beta}$, $\tau^{\alpha,*,\beta}$, $R^{*,\beta}$, $P^{*,\beta}$ არ არის შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$-დან $L_{1/2}$-ში, სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

(ორგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა 5. ა) ვთქვათ $q_0 > 0$ და $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$. ამ შემთხვევაში ნორლუნდის საშუალოების მიმდევრობა უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების მიმართ, განსაზღვრული $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი მიმდევრობით

$$t_{n,n}^{\beta} f = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_{k,k}^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}}{Q_n} = 0.$$

ბ) ვთქვათ $\{q_n : n \geq 0\}$ მიმდევრობა მონოტონურია. მაშინ ნორლუნდის საშუალოების მიმდევრობა უოლშის და კაჩმარსკის სისტემების მიმართ, განსაზღვრული $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი მიმდევრობით

$$t_{n,n}^{\beta} f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_{k,k}^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

რეგულარულია.

თეორემა 6. ა) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის

$$t_{n,n}^{\beta} f = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_{k,k}^{\beta} f, \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,*,\beta} f = \sup_{n \in N}\left|t_{n,n}^{\beta} f\right| \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

შემოსაზღვრულია $H_{2/3}$-დან სუსტ-$L_{2/3}$-ში.

ბ) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_0}{Q_n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,*,\beta} f = \sup_{n \in N}\left|t_{n,n}^{\beta} f\right| \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

შემოსაზღვრულია $H_{2/3}$-დან სუსტ-$L_{2/3}$-ში, სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

შედეგი 3. ა) ვთქვათ $f \in L_1(G \times G)$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,n}^{\beta} f = f \qquad \text{თ.ყ.} \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

ბ) ვთქვათ $f \in L_1(G \times G)$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_0}{Q_n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,n}^{\beta} f = f \qquad \text{თ.ყ.} \qquad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

თეორემა 7. ა) ვთქვათ $0 < p < 2/3$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_0}{Q_n} \geq \frac{c}{n},$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in N}\left\|t_{n,n}^{\beta} f\right\|_{weak-L_p} = \infty \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 2/3$. ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in N}\left\|t_{n,n}^{\beta} f\right\|_{weak-L_p} = \infty \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

თეორემა 8. ა) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაკლებადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{q_0 n \log^{3/2} n}{Q_n} = \infty,$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,*,\beta} f = \sup_{n\in N}\left|t_{n,n}^{\beta} f\right| \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

არ არის შემოსაზღვრულია $H_{2/3}$-დან $L_{2/3}$-ში.

ბ) ყოველი ნორლუნდის საშუალოსათვის, არაუარყოფითი, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_n : n \geq 0\}$, რომელებიც ამაყოფილებენ პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{q_{n-1} n \log^{3/2} n}{Q_n} = \infty,$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$t^{*,*,\beta} f = \sup_{n\in N}\left|t_{n,n}^{\beta} f\right|$$

არ არის შემოსაზღვრული $H_{2/3}$-დან $L_{2/3}$-ში, სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

შედეგი 4. შემდეგი მაქსიმალური ოპერატორები $\sigma^{*,*\beta}$, $\sigma^{\alpha,*,*\beta}$, $\tau^{\alpha,*,*\beta}$, $R^{*,*\beta}$, $P^{*,*\beta}$ არ არის შემოსაზღვრულია $H_{2/3}$-დან $L_{2/3}$-ში, სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

ძირითადი შედეგების

დამტკიცება

(ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა 1-ის დამტკიცება. ვთქვათ $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n f(x_0) \to f(x_0)$. მაშინ არსებობს N_0, ისეთი რომ

$$\left|S_n f(x_0) - f(x_0)\right| \le \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n \ge N_0.$$

რადგან $\{ q_n : n \ge 0 \}$ არაუარყოფითი მიმდევრობაა გვექნება

$$\begin{aligned}
&\left|t_n^{\beta}\left(f(x)\right) - \left(f(x)\right)\right| \\
&\le \frac{1}{Q_n} \sum_{j=1}^{N_0} q_{n-j} \left|S_j^{\beta}\left(f(x)\right) - f(x)\right| \\
&+ \frac{1}{Q_n} \sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j} \left|S_j^{\beta}\left(f(x)\right) - f(x)\right| \\
&= I + II,
\end{aligned}$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

რადგან მოცემული x_0 წერტილისთვის N_0 სასრული ფიქსირებული რიცხვია, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
I &\le c N_0 \max_{1\le k\le N_0} \left|S_j^{\beta}\left(f(x)\right) - f(x)\right| \sup_{1\le k\le N_0} \frac{q_{n-k}}{Q_{n-k-1}} \\
&\le c \max_{1\le k\le N_0} \frac{q_{n-k}}{Q_{n-k-1}} \to 0,
\end{aligned}$$

როცა $n \to \infty$.

II -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
II &\le \frac{1}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j}\left|S_j^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j} \le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=1}^{n} q_{n-j} \\
&= \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=0}^{n-1} q_j = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$, $n \in N$. რაც ამთავრებს თეორემა 1-ის პირველი ნაწილის საკმარისობის დამტკიცებას.

ეხლა დავამტკიცოთ აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ

$$
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\right| = A > 0 .
$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$
f(x) = \beta_1, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).
$$

თუ გამოვიყენებთ უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების ორთონორმირებულობას მივიღებთ

$$
S_n\beta_1(x) = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \beta_1(x), & n > 1, \end{cases}
$$

სადაც $\beta_1 = w_1$ ან $\beta_1 = \kappa_1$. ამიტომ

$$
\lim_{n\to\infty} S_n\beta_1(x) = \beta_1(x)
$$

ყველა წერტილში.

მეორე მხრივ

$$
\begin{aligned}
&\left|t_n^{\beta}\left(\beta_1(x)\right)-\beta_1(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n} q_{n-j} S_j^{\beta}\left(\beta_1(x)\right)-\beta_1(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=2}^{n} q_{n-j} S_j^{\beta}\left(\beta_1(x)\right)-\beta_1(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n} q_{n-j} S_j^{\beta}\left(\beta_1(x)\right)-\beta_1(x)+\frac{q_{n-1}}{Q_n}\beta_1(x)\right| \\
&= \left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\beta_1(x)\right| = \left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\right|.
\end{aligned}
$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\left|t_n^{\beta}\left(\beta_1(x)\right)-\beta_1(x)\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\right|=A>0.$$

თეორემა 1-ის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ბ) აბელის გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ

(10) $$Q_n:=\sum_{j=0}^{n-1}q_j=\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}=\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j+q_0 n$$

და

(11) $$\begin{aligned}&t_n^{\beta}\left(f(x)\right)\\&=\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}S_j^{\beta}\left(f(x)\right)\\&\le\frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)+q_0 n\sigma_n^{\beta}\left(f(x)\right)\right).\end{aligned}$$

(10) ტოლობის $f(x)$-ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$f(x)=\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}=\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)jf(x)+q_0 nf(x).$$

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n:n\ge 0\}$ არაკლებადია. მაშინ (10) და (11) ტოლობების გამოყენებით

$$\begin{aligned}&\left|t_n^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right|\\&\le\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right|j\left|\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right|\\&+\frac{q_0 n}{Q_n}\left|\sigma_n^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right|\\&=I+II.\end{aligned}$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი არაკლებადი $\{q_n:n\ge 0\}$ მიმდევრობისათვის

$$\frac{q_0 n}{Q_n}\le\frac{q_0 n}{q_0 n}=1.$$

თუ გამოვიყენებთ σ_n^{β}-ის რეგულარობას მივიღებთ

$$II\to 0,\quad \text{როცა}\quad n\to\infty$$

და

$$\left|\sigma_n f(x_0)-f(x_0)\right|\le\varepsilon,\quad \text{როცა}\quad n\ge N_0.$$

I -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} I &\le \frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right| j \left|\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right| \\ &\le \frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{N_0}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right| j \left|\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right| \\ &+ \frac{1}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right| j \left|\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right| \\ &= I_1 + I_2 . \end{aligned}$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\begin{aligned} I_1 &\le cN_0 \max_{1\le k\le N_0}\left|\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)-f(x)\right| \max_{1\le k\le N_0}\frac{q_{n-k}}{Q_{n-k-1}} \\ &\le c \max_{1\le k\le N_0}\frac{q_{n-k}}{Q_{n-k-1}} \to 0, \quad \text{როცა} \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

I_2 -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} I_2 &\le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j} \\ &\le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right) j \\ &\le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right) j \\ &= \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=0}^{n-1} q_j = \varepsilon. \end{aligned}$$

ე.ი როცა მიმდევრობა $\{q_n : n\ge 0\}$ არაკლებადია, მაშინ ნორლუნდის საშუალოები რეგულარულია.

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n\ge 0\}$ არაზრდადია, მაშინ

$$\frac{q_{n-1}}{Q_n} \le \frac{q_{n-1}}{nq_{n-1}} = \frac{1}{n} \to 0, \ \text{როცა} \ n\to\infty.$$

თეორემა 1-ის პირველი ნაწილის თანახმად ამ შემთხვევაშიც გვაქვს რეგულარობა.

რაც ასრულებს თეორემა 1-ის დამტკიცებას.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n \ge 0\}$ არაკლებადია. აბელის გარდაქმნის, (10)-ის და (11)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|t_n^{\beta}\left(f(x)\right)\right| \le \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left|\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j\right|\left|\sigma_j^{\beta}\left(f(x)\right)\right| + q_0 n\left|\sigma_n^{\beta}\left(f(x)\right)\right|\right)$$
$$\le \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j + q_0 n\right)\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \le \left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|,$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

რადგან ეს უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $n \in N$-ისათვის საბოლოოდ მივიღებთ

(12) $$\left|t^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \le \left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|,$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n \ge 0\}$ არაზრდადია და

(13) $$\frac{q_0}{Q_n} = \overline{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

აბელის გარდაქმნის, (10)-ის და (13) პირობის გამოყენებით მივიღებთ

(14)
$$\left|t_n^{\beta}\left(f(x)\right)\right| = \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n} q_{n-j} S_j^{\beta}\left(f(x)\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right| j + q_0 n\right)\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_{n-j-1}-q_{n-j}\right)j - q_0 n + 2q_0 n\right)\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{Q_n}\left(-\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j + q_0 n\right) + 2q_0 n\right)\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{Q_n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j + q_0 n\right|\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|$$
$$+\frac{2q_0 n}{Q_n}\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \le 3\left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|$$

და

(15) $$\left|t^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \le \left|\sigma^{*,\beta}\left(f(x)\right)\right|, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

მეორე მხრივ, თეორემების W1-ის და K1-ის გამოყენებით მივიღებთ რომ $t^{*,\beta}$ შემოსაზღვრულია $H_{1/2}$-დან სუსტ-$L_{1/2}$-ში, სადაც $\beta = w$ ან $\beta = k$.

თეორემა 3-ის დამტკიცება. ვთქვათ

(16) $$f_{n_k}(x)=D_{2^{2n_k+1}}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)$$

ცხადია, რომ

(17) $$\hat{f}_{n_k,\beta}(i)=\begin{cases}1, i=2^{2n_k},\ldots,2^{2n_k+1}-1,\\ 0, sxvagan.\end{cases}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

(18) $$S_i^{\beta}\ f_{n_k}(x)=\begin{cases}D_i^{\beta}(x)-D_{2^{2n_k}}(x), 2^{2n_k}+1,\ldots,2^{2n_k+1}-1,\\ f_{n_k}(x), i\geq 2^{2n_k+1},\\ 0, sxvagan,\end{cases}$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$.

(1) და (17)-დან დავასკვნით

(19) $$\begin{aligned}&\left\|f_{n_k}\right\|_{H_p}\\ &=\left\|\sup_{n\in N}S_{2^n}\left(f_{n_k}\right)\right\|_{L_p}\\ &=\left\|D_{2^{2n_k+1}}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)\right\|_{L_p}\\ &=\left\|D_{2^{2n_k}}(x)\right\|_{L_p}\leq 2^{2n_k(1-1/p)}.\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (18)-ს მივიღებთ

(20) $$\begin{aligned}&\left|t_{2^{2n_k}+1}^{\beta}f_{n_k}(x)\right|\\ &=\frac{1}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|\sum_{j=1}^{2^{2n_k}+1}q_{2^{2n_k}+1-j}S_j^{\beta}\left(f_{n_k}(x)\right)\right|\\ &=\frac{1}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|q_0S_{2^{2n_k}+1}^{\beta}\left(f_{n_k}(x)\right)\right|\\ &=\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|D_{2^{2n_k}+1}^{\beta}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)\right|\\ &=\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|\beta_{2^{2n_k}}(x)\right|=\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}.\end{aligned}$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$. ამიტომ

(21) $$\left\{x\in G:\left|t_{2^{2n_k}+1}^{\beta}f_{n_k}(x)\right|>\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\right\}=|G|=1,$$

ვთქვათ $0<p<1/2$. (19) და (21)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\frac{\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left\{x\in G:\left|t^{\beta}_{2^{2n_k}+1}f_{n_k}(x)\right|>\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\right\}^{1/p}}{\left\|f_{n_k}\right\|_{H_p}} \tag{22}$$

$$\geq \frac{cq_0\left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-1}}{Q_{2^{2n_k}+1}},$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

თუ თუ მიმდევრობა $\{ q_n : n \geq 0 \}$ არაკლებადია, მაშინ

$$\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}} \geq \frac{1}{2^{2n_k}+1} \tag{23}$$

სრულდება თეორემა 3-ის პირველი ნაწილის პირობის თანახმად.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ მიმდევრობა $\{ q_n : n \geq 0 \}$ არაზრდადია, მაშინ

$$\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}} \geq \frac{1}{2^{2n_k}+1}. \tag{24}$$

(23) და (24)-ის და თეორემა 3-ის პირველი ნაწილის პირობის თანახმად როცა $0 < p < 1/2$ და $\{ q_n : n \geq 0 \}$ მონოტონური მიმდევრობაა სრულდება

$$\frac{cq_0\left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-1}}{Q_{2^{2n_k}+1}} \geq c\left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-2} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty. \tag{25}$$

(22)-ის და (25)-ის გაერთიანებით კი მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგს

$$\frac{\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left\{x\in G:\left|t^{\beta}_{2^{2n_k}+1}f_{n_k}(x)\right|>\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\right\}^{1/p}}{\left\|f_{n_k}\right\|_{H_p}}$$

$$\geq \left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-2} \to \infty, \quad k \to \infty,$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

თეორემა 4-ის დამტკიცება. ვთქვათ, $A_{n_k}^s = 2^{2n_k} + 2^{2s} - 1, \quad s < n_k$. (18)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
&\left| t_{A_{n_k}^s}^{\beta} f_{n_k}(x) \right| \\
&= \frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=0}^{A_{n_k}^s} q_{A_{n_k}^s - j} S_j^{\beta}\left(f_{n_k}(x) \right) \right| \\
&= \frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=2^{2n_k}+1}^{A_{n_k}^s} q_{A_{n_k}^s - j} \left(D_j^{\beta}(x) - D_{2^{2n_k}}(x) \right) \right| \\
&= \frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s} - j - 1} \left(D_{j+2^{2n_k}}^{\beta}(x) - D_{2^{2n_k}}(x) \right) \right|,
\end{aligned}
$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

ვთქვათ მიმდევრობა $\{ q_n : n \ge 0 \}$ არაუარყოფითი და არაკლებადია და $\{ \lambda_k : k \in N_+ \}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\lim_{k \to \infty} \frac{q_0 \lambda_k \log^2 \lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი λ_k-თვის არსებობს დადებითი რიცხვები $m_k^{'}$, ისეთი, რომ $2^{2m_k^{'}+1} < \lambda_k \le 2^{2m_k^{'}+2}$. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{q_0 2^{2m_k^{'}+1} \left(2m_k^{'} + 1 \right)^2}{Q_{2^{m_k^{'}+1}}} \\
&\ge \lim_{k \to \infty} \frac{q_0 \lambda_k \log^2 \lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $\{ n_k : k \in N_+ \} \subset \{ m_k^{'} : k \in N_+ \}$, ისეთი, რომ

$$\lim_{k \to \infty} \frac{q_0 2^{2n_k+1} \left(2n_k + 1 \right)^2}{Q_{2^{2n_k+1}}} = \infty.$$

ვთქვათ, $x \in I_{2s} \setminus I_{2s+1}$, მაშინ $D_j = j, \quad j = 1, \ldots, 2^{2s} - 1$. (25)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\left|t^{w}_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x)\right|\\ &\geq \frac{1}{Q_{A^s_{n_k}}}\left|\sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} D^w_j(x)\right|\\ &\geq \frac{q_0}{Q_{A^s_{n_k}}}\sum_{j=1}^{2^{2s}} j \geq \frac{cq_0 2^{4s}}{Q_{A^s_{n_k}}}\\ &\geq \frac{cq_0 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}.\end{aligned}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}&\int_G \left|t^{*,w} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x)\\ &\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{I_{2s}\setminus I_{2s+1}} \left|t^{*,w} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x)\\ &\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{I_{2s}\setminus I_{2s+1}} \left|t^{w}_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x)\\ &\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\sqrt{\frac{q_0 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}}\frac{1}{2^{2s}}\\ &\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\sqrt{\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}}\\ &\geq cn_k\sqrt{\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}}.\end{aligned} \tag{30}$$

ვთქვათ, $x\in J_{2n_k}^{2n_k-2s-1}$, მაშინ $D^w_j\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right)=j,\quad j=1,\ldots,2^{2s}-1.$ (28)-ის გამოყენებით ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\left|t^{\kappa}_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x)\right|\\ &\geq \frac{1}{Q_{A^s_{n_k}}}\left|\sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} D^w_j\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right)\right|\\ &\geq \frac{q_0}{Q_{A^s_{n_k}}}\sum_{j=1}^{2^{2s}} j \geq \frac{cq_0 2^{4s}}{Q_{A^s_{n_k}}}\\ &\geq \frac{cq_0 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}.\end{aligned}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
&\int_G \left|t^{*,\kappa} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{J_{2n_k}^{2n_k-2s-1}} \left|t^{*,\kappa} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{J_{2n_k}^{2n_k-2s-1}} \left|t^{\kappa}_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\
(31)\qquad &\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1} \sqrt{\frac{q_0 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}} \frac{1}{2^{2s}} \\
&\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1} \sqrt{\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}} \\
&\geq cn_k \sqrt{\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}}.
\end{aligned}
$$

(19)-ის, (30)-ის და (31)-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\int_G \left|t^{*,\beta} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x)\right)^2}{\left\|f_{n_k}(x)\right\|_{H_{1/2}}} \\
&\geq \frac{q_0 2^{2n_k} n_k^2}{Q_{2^{2n_k+1}}} \\
&\geq \frac{q_0 2^{2n_k+1}(2n_k+1)^2}{Q_{2^{2n_k+1}}} \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

თეორემა 4-ის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი და არაზრდადია და $\{\lambda_k : k \in N_+\}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$
\lim_{k\to\infty} \frac{q_{\lambda_k-1}\lambda_k \log^2 \lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.
$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი λ_k-თვის არსებობს დადებითი რიცხვები m_k', ისეთი, რომ $2^{2m_k'+1} < \lambda_k \leq 2^{2m_k'+2}$. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{q_{2^{2m_k'+1}-1} 2^{2m_k'+1}\left(2m_k'+1\right)^2}{Q_{2^{m_k'+1}}} \\
&\geq \lim_{k\to\infty} \frac{q_{\lambda_k-1}\lambda_k \log^2 \lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $\{n_k : k \in N_+\} \subset \{m_k' : k \in N_+\}$, ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{2n_k+1}(2n_k+1)}{Q_{2^{2n_k+1}}} = \infty.$$

ვთქვათ, $x \in I_{2s} \setminus I_{2s+1}$, მაშინ $D_j = j, \quad j = 1,\dots,2^{2s}-1.$ მას შემდეგ რაც

(26) $$D^w_{j+2^{2n_k}}(x) - D_{2^{2n_k}}(x) = w_{2^{2n_k}}(x) D^w_j(x), \quad j = 1,2,\dots,2^{2n_k},$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\left| t^w_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x) \right| \\
&\geq \frac{1}{Q_{A^s_{n_k}}} \left| \sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} D^w_j(x) \right| \\
&\geq \frac{q_{A^s_{n_k}-1}}{Q_{A^s_{n_k}}} \sum_{j=1}^{2^{2s}} j \geq \frac{c q_{A^s_{n_k}-1} 2^{4s}}{Q_{A^s_{n_k}}} \\
&\geq \frac{c q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}.
\end{aligned}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

(27) $$\begin{aligned}
&\int_G \left| t^{*,w} f_{n_k}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{I_{2s}\setminus I_{2s+1}} \left| t^{*,w} f_{n_k}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{I_{2s}\setminus I_{2s+1}} \left| t^w_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq c \sum_{s=1}^{n_k-1} \sqrt{\frac{q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}} \frac{1}{2^{2s}} \\
&\geq c \sum_{s=1}^{n_k-1} \sqrt{\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}} \\
&\geq c n_k \sqrt{\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}}.
\end{aligned}$$

ვთქვათ, $x \in J_{2n_k}^{2n_k-2s-1}$, მაშინ $D^w_j\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right) = j, \quad j = 1,\dots,2^{2s}-1.$ მას შემდეგ რაც

(28) $$D^\kappa_{j+2^{2n_k}}(x) - D_{2^{2n_k}}(x) = w_{2^{2n_k}}(x) D^w_j\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right), \quad j = 1,2,\dots,2^{2n_k}-1,$$

მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\left|t^{\kappa}_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x)\right| \\
&\geq \frac{1}{Q_{A^s_{n_k}}}\left|\sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} D^w_j\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right)\right| \\
&\geq \frac{1}{Q_{A^s_{n_k}}}\sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1}\, j \\
&\geq \frac{c q_{A^s_{n_k}-1} 2^{4s}}{Q_{A^s_{n_k}}} \\
&\geq \frac{c q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}.
\end{aligned}
$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
&\int_G \left|t^{*,\kappa} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{J_{2n_k}^{2n_k-2s-1}} \left|t^{*,\kappa} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{J_{2n_k}^{2n_k-2s-1}} \left|t^{\kappa}_{A^s_{n_k}} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\
&\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1} \sqrt{\frac{q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{4s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}}\,\frac{1}{2^{2s}} \\
&\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1} \sqrt{\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}} \\
&\geq c n_k \sqrt{\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

(19)-ის, (27)-ის და (29)-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\int_G \left|t^{*,\beta} f_{n_k}(x)\right|^{1/2} d\mu(x)\right)^2}{\left\|f_{n_k}(x)\right\|_{H_{1/2}}} \\
&\geq \frac{q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{2n_k} n_k^2}{Q_{2^{2n_k+1}}} \\
&\geq \frac{q_{2^{2n_k+1}-1} 2^{2n_k+1}(2n_k+1)^2}{Q_{2^{2n_k+1}}} \to \infty, \quad \text{როცა } k \to \infty,
\end{aligned}
$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$. რაც ასრულებს თეორემა 4-ის მეორე ნაწილის დამტკიცებას.

(ორგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა 5-ის დამტკიცება. ვთქვათ $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_{n,n} f(x,y) \to f(x,y)$. მაშინ არსებობს N_0, ისეთი რომ

$$\left|S_{n,n} f(x,y) - f(x,y)\right| \le \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n \ge N_0.$$

რადგან $\{ q_n : n \ge 0 \}$ არაუარყოფითი მიმდევრობაა გვექნება

$$\begin{aligned}
&\left|t_{n,n}^{\beta}(f(x,y)) - (f(x,y))\right| \\
&\le \frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{N_0} q_{n-j}\left|S_{j,j}^{\beta}(f(x,y)) - f(x,y)\right| \\
&+ \frac{1}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j}\left|S_{j,j}^{\beta}(f(x,y)) - f(x,y)\right| \\
&= I + II,
\end{aligned}$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$.

რადგან მოცემული (x,y) წერტილისთვის N_0 სასრული ფიქსირებული რიცხვია, გვექნება

$$I \le cN_0 \max_{1\le k\le N_0}\left|S_{j,j}^{\beta}(f(x,y)) - f(x,y)\right| \max_{1\le k\le N_0}\frac{q_{n-k}}{Q_{n-k+1}}$$

$$\le c\max_{1\le k\le N_0}\frac{q_{n-k}}{Q_{n-k+1}} \to 0, \quad \text{როცა} \quad n\to\infty.$$

II -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
II &\le \frac{1}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j}\left|S_{j,j}^{\beta}(f(x,y)) - f(x,y)\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n} q_{n-j} \le \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=1}^{n} q_{n-j} = \frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=0}^{n-1} q_j = \varepsilon.
\end{aligned}$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$, $n \in N$.

თეორემა 1-ის პირველი ნაწილის საკმარისობის დამტკიცება დამთავრებულია.

ეხლა დავამტკიცოთ აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\right| = A > 0.$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y) = \beta_1(x)\beta_1(y), \quad (\beta_1 = w_1 \text{ ან } \beta_1 = \kappa_1).$$

თუ გამოვიყენებთ უოლშის და კაჩმაჟის სისტემების ორთონორმირებულობას მივიღებთ

$$S_{n,n}\beta_1(x)\beta_1(y)=\begin{cases}0, & n=1,\\ \beta_1(x)\beta_1(y), & n>1,\end{cases}$$

სადაც $\beta_1 = w_1$ ან $\beta_1 = \kappa_1$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,n}\beta_1(x)\beta_1(y)=\beta_1(x)\beta_1(y)$$

ყველა წერტილში. მეორე მხრივ

$$\begin{aligned}
&\left|t_{n,n}^{\beta}(\beta_1(x)\beta_1(y))-\beta_1(x)\beta_1(y)\right|\\
&=\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}S_{j,j}^{\beta}(\beta_1(x)\beta_1(y))-\beta_1(x)\beta_1(y)\right|\\
&=\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=2}^{n}q_{n-j}S_{j,j}^{\beta}(\beta_1(x)\beta_1(y))-\beta_1(x)\beta_1(y)\right|\\
&=\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}S_{j,j}^{\beta}(\beta_1(x)\beta_1(y))-\beta_1(x)\beta_1(y)+\frac{q_{n-1}}{Q_n}\beta_1(x)\beta_1(y)\right|\\
&=\left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\beta_1(x)\beta_1(y)\right|=\left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\right|.
\end{aligned}$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\left|t_{n,n}^{\beta}(\beta_1(x))-\beta_1(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{q_{n-1}}{Q_n}\right|=A>0.$$

თეორემა 5-ის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

აბელის გარდაქმნის გამოყენებით მივეღებთ

$$\begin{aligned}
t_{n,n}^{\beta}(f(x,y))&=\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}S_{j,j}^{\beta}(f(x,y))\\
&=\frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(q_{n-j}-q_{n-j-1})j\sigma_{j,j}^{\beta}(f(x,y))+q_0 n\sigma_{n,n}^{\beta}(f(x,y))\right)
\end{aligned}$$

და

$$f(x,y)=\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}q_{n-j}=\sum_{j=1}^{n-1}(q_{n-j}-q_{n-j-1})jf(x,y)+q_0 nf(x,y).$$

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n\ge 0\}$ არაკლებადია. მაშინ

$$\left|t_{n,n}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|\le\frac{1}{Q_n}\sum_{j=0}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right|j\left|\sigma_{j,j}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|$$

$$+\frac{q_0 n}{Q_n}\left|\sigma_{n,n}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|=I+II.$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი არაკლებადი $\{q_n : n\ge 0\}$ მიმდევრობისათვის

$$\frac{q_0 n}{Q_n}\le\frac{q_0 n}{q_0 n}=1.$$

თუ გამოვიყენებთ $\sigma_{n,n}^{\beta}$ -ის რეგულარობას მივიღებთ $II\to 0,$ როცა $n\to\infty$ და

$$\left|\sigma_{n,n}f(x,y)-f(x,y)\right|\le\varepsilon,\quad \text{როცა}\quad n\ge N_0.$$

I -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$I\le\frac{1}{Q_n}\sum_{j=0}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right|j\left|\sigma_{j,j}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|$$

$$\le\frac{1}{Q_n}\sum_{j=0}^{N_0}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right|j\left|\sigma_{j,j}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|$$

$$+\frac{1}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right|j\left|\sigma_{j,j}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|=I_1+I_2.$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$I_1\le cN_0\max_{1\le k\le N_0}\left|\sigma_{j,j}^{\beta}\left(f(x,y)\right)-f(x,y)\right|\max_{1\le k\le N_0}\frac{q_{n-k}}{Q_{n-k-1}}$$

$$\le c\max_{1\le k\le N_0}\frac{q_{n-k}}{Q_{n-k-1}}\to 0,\quad \text{როცა}\quad n\to\infty.$$

I_2 -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$I_2\le\frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n}q_{n-j}\le\frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=N_0+1}^{n}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j$$

$$\le\frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j=\frac{\varepsilon}{Q_n}\sum_{j=0}^{n-1}q_j=\varepsilon.$$

ე.ი როცა მიმდევრობა $\{q_n : n\ge 0\}$ არაუარყოფითი და არაკლებადია, მაშინ ნორლუნდის საშუალოები რეგულარულია.

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n\ge 0\}$ არაუარყოფითი და არაზრდადია, მაშინ

$$\frac{q_{n-1}}{Q_n}\le\frac{q_{n-1}}{nq_{n-1}}=\frac{1}{n}\to 0,\ \text{როცა}\ n\to\infty.$$

თეორემა 5-ის პირველი ნაწილის თანახმად ამ შემთხვევაშიც გვაქვს რეგულარობა.

რაც ასრულებს თეორემა 5-ის დამტკიცებას.

თეორემა 6-ის დამტკიცება. ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n \geq 0\}$ არაკლებადია. აბელის გარდაქმნის და (10)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\left|t_{n,n}^{\beta}\left(f(x)\right)\right| &= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=2^N+1}^{n} q_{n-j} S_{j,j}^{\beta}\left(f(x)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j\right|\left|\sigma_{j,j}^{\beta}\left(f(x)\right)\right| + q_0 n\left|\sigma_{n,n}^{\beta}\left(f(x)\right)\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j + q_0 n\right)\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \leq \left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right|.
\end{aligned}$$

რადგან ეს უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $n \in N$-ის საბოლოოდ მივიღებთ

(32) $$\left|t^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \leq \left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right|, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa).$$

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი და არაზრდადია და

(33) $$\frac{q_0}{Q_n} \geq \frac{c}{n}.$$

აბელის გარდაქმნის, (10)-ის და (33) პირობის გამოყენებით მივიღებთ

(34) $$\begin{aligned}
\left|t_{n,n}^{\beta}\left(f(x)\right)\right| &= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=0}^{n} q_{n-j} S_{j,j}^{\beta}\left(f(x)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|q_{n-j}-q_{n-j-1}\right| j - q_0 n + 2q_0 n\right)\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \\
&= \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(q_{n-j-1}-q_{n-j}\right)j - q_0 n + 2q_0 n\right)\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \\
&= \frac{1}{Q_n}\left(-\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j + q_0 n\right) + 2q_0 n\right)\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{Q_n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(q_{n-j}-q_{n-j-1}\right)j + q_0 n\right|\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| + \frac{2q_0 n}{Q_n}\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \\
&\leq 3\left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right|,
\end{aligned}$$

სადაც $\beta = w$ ან $\beta = \kappa$ და

(35) $$\left|t^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right| \leq \left|\sigma^{*,*,\beta}\left(f(x)\right)\right|, \quad (\beta = w \text{ ან } \beta = \kappa)$$

მეორე მხრივ, თეორემების W2-ის K2-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $t^{*,*,\beta}$ შემოსაზღვრულია $H_{2/3}$-დან სუსტ-$L_{2/3}$-ში, სადაც $\beta = w$ ან $\beta = k$.

თეორემა 6 დამტკიცებულია.

თეორემა 7-ის დამტკიცება. ვთქვათ

(36) $$f_{n_k}(x,y)=\left(D_{2^{2n_k+1}}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)\right)\left(D_{2^{2n_k+1}}(y)-D_{2^{2n_k}}(y)\right).$$

ცხადია, რომ

(37) $$\hat{f}_{n_k}^{\beta}(i,j)=\begin{cases}1,(i,j)=\left\{2^{2n_k},\ldots,2^{2n_k+1}-1\right\}\times\left\{2^{2n_k},\ldots,2^{2n_k+1}-1\right\},\\ 0, sxvagan,\end{cases}$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$. შეგვიძლია დავწეროთ

(38)

$$S_{i,j}^{\beta}f_{n_k}(x,y)=$$
$$\begin{cases}\left(D_i^{\beta}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)\right)\times\left(D_j^{\beta}(y)-D_{2^{2n_k}}(y)\right),\left\{2^{2n_k}+1,\ldots,2^{2n_k+1}-1\right\}\times\left\{2^{2n_k}+1,\ldots,2^{2n_k+1}-1\right\},\\ f_{n_k}(x,y), i,j\geq 2^{2n_k+1},\\ 0, sxvagan.\end{cases}$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$. (1)-დან და (38)-დან დავასკვნით

(39) $$\begin{aligned}\left\|f_{n_k}\right\|_{H_p}&=\left\|\sup_{n\in N}S_{2^n,2^n}\left(f_{n_k}\right)\right\|_{L_p}\\ &=\left\|D_{2^{2n_k+1}}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)\right\|^2{}_{L_p}\\ &=\left\|D_{2^{2n_k}}(x)\right\|^2{}_{L_p}\leq 2^{4n_k(1-1/p)}.\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (38)-ს მივიღებთ

(40) $$\left|t_{2^{2n_k}+1,2^{2n_k}+1}^{\beta}f_{n_k}(x,y)\right|.$$
$$=\frac{1}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|\sum_{j=0}^{2^{2n_k}+1}q_{2^{2n_k}+1-j}S_{j,j}^{\beta}\left(f_{n_k}(x,y)\right)\right|$$
$$=\frac{1}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|q_0S_{2^{2n_k}+1,2^{2n_k}+1}^{\beta}\left(f_{n_k}(x,y)\right)\right|$$
$$=\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|\left(D_{2^{2n_k}+1}^{\beta}(x)-D_{2^{2n_k}}(x)\right)\left(D_{2^{2n_k}+1}^{\beta}(y)-D_{2^{2n_k}}y\right)\right|$$
$$=\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left|\beta_{2^{2n_k}}(x)\beta_{2^{2n_k}}(y)\right|=\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}},$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$. საიდანაც მივიღებთ

(41) $$\left\{x\in G:\left|t_{2^{2n_k}+1,2^{2n_k}+1}^{\beta}f_{n_k}(x,y)\right|>\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\right\}=|G|=1,$$

ვთქვათ $0<p<2/3$. (39) და (41)-ის გამოყენებით გვაქვს

(42) $$\frac{\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left\{x\in G\times G:\left|t^{\beta}_{2^{2n_k}+1,2^{2n_k}+1}f_{n_k}(x,y)\right|>\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\right\}^{1/p}}{\left\|f_{n_k}\right\|_{H_p}}$$

$$\geq\frac{cq_0\left(2^{2n_k}+1\right)^{2/p-2}}{Q_{2^{2n_k}+1}},$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$.

თუ თუ მიმდევრობა $\{q_n : n\geq 0\}$ არაუარყოფითი და არაკლებადია, მაშინ

(44) $$\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\geq\frac{1}{2^{2n_k}+1}$$

სრულდება თეორემა 7-ის პირველი ნაწილის პირობის თანახმად.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ მიმდევრობა $\{q_n : n\geq 0\}$ არაუარყოფითი და არაზრდადია, მაშინ

(43) $$\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\geq\frac{1}{2^{2n_k}+1},$$

(43) და (44)-ის და თეორემა 7-ის პირველი ნაწილის პირობის თანახმად როცა $0<p<2/3$ და $\{q_n : n\geq 0\}$ მონოტონური მიმდევრობაა სრულდება

(45) $$\frac{q_0\left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-1}}{Q_{2^{2n_k}+1}}$$

$$\geq c\left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-2}\to\infty,\ \text{როცა}\ \ k\to\infty.$$

(39)-ის (42)-ის და (45)-ის გაერთიანებით ადვილად მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგს

$$\frac{\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\left\{x\in G\times G:\left|t^{\beta}_{2^{2n_k}+1,2^{2n_k}+1}f_{n_k}(x,y)\right|>\frac{cq_0}{Q_{2^{2n_k}+1}}\right\}^{1/p}}{\left\|f_{n_k}\right\|_{H_p}}$$

$$\geq\left(2^{2n_k}+1\right)^{1/p-2}\to\infty,\quad k\to\infty,$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$.

თეორემა 7 დამტკიცებულია.

თეორემა 8-ის დამტკიცება. ვთქვათ, $A_{n_k}^s = 2^{2n_k} + 2^{2s} - 1,\ s < n_k$. მაშინ

$$\begin{aligned}
&\left| t_{A_{n_k}^s, A_{n_k}^s}^{\beta} f_{n_k}(x,y) \right| \\
&= \frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=0}^{A_{n_k}^s} q_{A_{n_k}^s - j} S_{j,j}^{\beta} \left(f_{n_k}(x,y) \right) \right| \\
(46) \qquad &= \frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=2^{2n_k}+1}^{A_{n_k}^s} q_{A_{n_k}^s - j} \left(D_j^{\beta}(x) - D_{2^{2n_k}}(x) \right) \left(D_j^{\beta}(y) - D_{2^{2n_k}}(y) \right) \right| \\
&= \frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} \left(D_{j+2^{2n_k}}^{\beta}(x) - D_{2^{2n_k}}(x) \right) \left(D_{j+2^{2n_k}}^{\beta}(y) - D_{2^{2n_k}}(y) \right) \right|.
\end{aligned}$$

ვთქვათ მიმდევრობა $\{ q_n : n \geq 0 \}$ არაკლებადია და $\{ \lambda_k : k \in N_+ \}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\lim_{k \to \infty} \frac{q_0 \lambda_k \log^{3/2} \lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი λ_k-თვის არსებობს დადებითი რიცხვები $m_k^{'}$, ისეთი, რომ $2^{2m_k^{'}+1} < \lambda_k \leq 2^{2m_k^{'}+2}$. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{q_0 2^{2m_k^{'}+1} \left(2m_k^{'} + 1 \right)^{3/2}}{Q_{2^{m_k^{'}+1}}} \geq \lim_{k \to \infty} \frac{q_0 \lambda_k \log^{3/2} \lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.$$

ვთქვათ $\{ n_k : k \in N_+ \} \subset \{ m_k^{'} : k \in N_+ \}$, ისეთი, რომ

$$\lim_{k \to \infty} \frac{q_0 2^{2n_k+1} \left(2n_k + 1 \right)^{3/2}}{Q_{2^{2n_k+1}}} = \infty.$$

ვთქვათ, $(x,y) \in \left(I_{2s} \setminus I_{2s+1} \right) \times \left(I_{2s} \setminus I_{2s+1} \right)$, მაშინ $D^w{}_j(x) D^w{}_j(y) = j^2,\ \ j = 1,\ldots,2^{2s}-1$. (26) და (46)-ის გამოყენებით

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Q_{A_{n_k}^s}} \left| \sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} D_j^w(x) D_j^w(y) \right| \\
&\geq \frac{q_0}{Q_{A_{n_k}^s}} \sum_{j=1}^{2^{2s}} j^2 \geq \frac{c q_0 2^{6s}}{Q_{A_{n_k}^s}} \geq \frac{c q_0 2^{6s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}.
\end{aligned}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_G \left|t^{*,*,w} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y)$$

$$\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{(I_{2s}\setminus I_{2s+1})\times(I_{2s}\setminus I_{2s+1})} \left|t^{*,*,w} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y)$$

(49)
$$\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{(I_{2s}\setminus I_{2s+1})\times(I_{2s}\setminus I_{2s+1})} \left|t^{w}_{A^s_{n_k},A^s_{n_k}} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y)$$

$$\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\left(\frac{q_0 2^{6s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}\frac{1}{2^{4s}} \geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\left(\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3} \geq cn_k\left(\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}.$$

ვთქვათ $(x,y)\in J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}\times J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}$, მაშინ

$$D_j^w\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right)D_j^w\left(\tau_{2^{2n_k}}(y)\right)=j^2,\quad j=1,\ldots,2^{2s}-1.$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\int_{G\times G} \left|t^{*,*\kappa} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y)$$

$$\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}\times J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}} \left|t^{*,*\kappa} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y)$$

(50)
$$\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}\times J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}} \left|t^{\kappa}_{A^s_{n_k},A^s_{n_k}} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y)$$

$$\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\left(\frac{q_0 2^{6s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}\frac{1}{2^{4s}}$$

$$\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\left(\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3} \geq cn_k\left(\frac{q_0}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}.$$

(39)-ის, (49)-ის და (50)-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$\frac{\left(\int_G \left|t^{*,*\beta} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x)\right)^{3/2}}{\left\|f_{n_k}(x)\right\|_{H_{2/3}}}$$

$$\geq \frac{q_0 2^{2n_k} n^{3/2}{}_k}{Q_{2^{2n_k+1}}}$$

$$\geq \frac{cq_0 2^{2n_k+1}(2n_k+1)^{3/2}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\to\infty,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=k$.

თეორემა 8-ის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ მიმდევრობა $\{q_n : n \geq 0\}$ არაუარყოფითი და არაზრდადია და $\{\lambda_k : k \in N_+\}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q_{\lambda_k - 1}\lambda_k \log^{3/2}\lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი λ_k-თვის არსებობს დადებითი რიცხვები $m_k^{\prime}$, ისეთი, რომ $2^{2m_k^{\prime}+1} < \lambda_k \leq 2^{2m_k^{\prime}+2}$. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{q_{2^{2m_k^{\prime}+1}-1}\, 2^{2m_k^{\prime}+1}\left(2m_k^{\prime}+1\right)^{3/2}}{Q_{2^{m_k^{\prime}+1}}} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{q_{\lambda_k - 1}\lambda_k \log^{3/2}\lambda_k}{Q_{\lambda_k}} = \infty.$$

ვთქვათ $\{n_k : k \in N_+\} \subset \{m_k^{\prime} : k \in N_+\}$, ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q_{2^{2n_k+1}-1}\, 2^{2n_k+1}\left(2n_k+1\right)^{3/2}}{Q_{2^{2n_k+1}}} = \infty.$$

ვთქვათ, $(x,y) \in \left(I_{2s} \setminus I_{2s+1}\right) \times \left(I_{2s} \setminus I_{2s+1}\right)$. მაშინ $D^w{}_j(x) D^w{}_j(y) = j^2$, $j = 1,\ldots,2^{2s}-1$. (26)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\left|t^w_{A^s_{n_k},A^s_{n_k}} f_{n_k}(x,y)\right| &= \frac{1}{Q_{A^s_{n_k}}} \left|\sum_{j=1}^{2^{2s}-1} q_{2^{2s}-j-1} D^w_j(x) D^w_j(y)\right| \\
&\geq \frac{q_{A^s_{n_k}-1}}{Q_{A^s_{n_k}}} \sum_{j=1}^{2^{2s}} j^2 \geq \frac{c q_{A^s_{n_k}-1}\, 2^{6s}}{Q_{A^s_{n_k}}} \\
&\geq \frac{c q_{2^{2n_k+1}-1}\, 2^{6s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}.
\end{aligned}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
&\int_{G\times G} \left|t^{*,*,w} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{\left(I_{2s}\setminus I_{2s+1}\right)\times\left(I_{2s}\setminus I_{2s+1}\right)} \left|t^{*,*,w} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y) \\
&\geq \sum_{s=1}^{n_k-1} \int_{\left(I_{2s}\setminus I_{2s+1}\right)\times\left(I_{2s}\setminus I_{2s+1}\right)} \left|t^w_{A^s_{n_k},A^s_{n_k}} f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3} d\mu(x,y) \qquad (47) \\
&\geq c \sum_{s=1}^{n_k-1} \left(\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}\, 2^{6s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3} \frac{1}{2^{4s}} \\
&\geq c \sum_{s=1}^{n_k-1} \left(\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3} \geq c n_k \left(\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}.
\end{aligned}$$

ვთქვათ $(x,y)\in J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}\times J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}$, მაშინ

$$D_j^w\left(\tau_{2^{2n_k}}(x)\right)D_j^w\left(\tau_{2^{2n_k}}(y)\right)=j^2,\quad j=1,\ldots,2^{2s}-1.$$

(28)-ის და (46)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_{G\times G}\left|t^{*,*\kappa}f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3}d\mu(x,y)$$
$$\geq\sum_{s=1}^{n_k-1}\int_{J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}\times J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}}\left|t^{*,*\kappa}f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3}d\mu(x,y)$$
$$\geq\sum_{s=1}^{n_k-1}\int_{J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}\times J_{2n_k}^{\;2n_k-2s-1}}\left|t^{\kappa}_{A_{n_k}^s,A_{n_k}^s}f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3}d\mu(x,y)$$
$$\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\left(\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}2^{6s}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}\frac{1}{2^{4s}}\tag{48}$$
$$\geq c\sum_{s=1}^{n_k-1}\left(\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}$$
$$\geq cn_k\left(\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\right)^{2/3}.$$

(39)-ის, (47)-ის და (48)-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$\frac{\left(\int_G\left|t^{*,*\beta}f_{n_k}(x,y)\right|^{2/3}d\mu(x)\right)^{3/2}}{\left\|f_{n_k}(x)\right\|_{H_{2/3}}}$$
$$\geq\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}2^{2n_k}n^{3/2}{}_k}{Q_{2^{2n_k+1}}}$$
$$\geq\frac{q_{2^{2n_k+1}-1}2^{2n_k+1}(2n_k+1)^{3/2}}{Q_{2^{2n_k+1}}}\to\infty,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

სადაც $\beta=w$ ან $\beta=\kappa$.

თეორემა 8 დამტკიცებულია.

დასკვნა

სხვადასხვა კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობის საკითხებს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავს ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას.

მოცემულ ნაშრომში განხილული საკითხები არსებითად ეხმიანება ზემოთ აღნიშნული მიმართულებების პრობლემატიკას. ჩვენ დავატკიცეთ მონოტონური კოეფიციენტების მქონე ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორისთვის (H_p, L_p) და $(H_p, weak-L_p)$ ტიპის უტოლობები, ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშ-ფურიეს და კაჩმაჟ-ფურიეს სისტემების მიმართ. ჩვენ ასევე გამოვიყენეთ მიღებული შედეგები იგივე ტიპის ნორლუნდის საშუალოების თ.ყ კრებადობის საკითხების დასადგენად. ნაშრომში მოცემული მეთოდი იძლევა საშუალებას მიღებული შედეგები განზოგადდლეს სხვადასხვა ორთომორმირებული სისტემების მიმართ. ასევე ანალოგიური შედეგები შეიძლება განზოგადებულ იქნას მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში.

ნაშრომი წარმოადგენს დასრულებული სახის კვლევას და ის აუცილებლად გაგზავნილ იქნება მათემატიკურ ჟურნალში გამოსაქვეყნებლად.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. J.Fine Cesáro summability of Walsh-Fourier series, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41 (1955), 558-591. Zbl 0065.05303

2. F. Schipp, Certain rearrengements of series in the Walsh seriesMat. Zametki 18 (1975), 193--201. Zbl 0349.42013

3. N. J. Fuji, A maximal inequality for H_1 functions on the generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Soc. 77 (1979), 111-116.

4. F. Weisz, Cesáro summability of one and two-dimensional Fourier series, Anal. math. Studies, 5 (1996), 353-367.

5. P. Simon, Cesáro summability with respect to two-parameter Walsh-system, Monatsh. Math.} (2000), 321-334.

6. U. Goginava, Maximal operators of Fejėr -Walsh means. Acta Sci. Math. (Szeged) 74 (2008), 615-624..

7. I. Blahota, G. Gát, U. Goginava, Maximal operators of Fejėr means of Vilenkin-Fourier series. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7 (2006), 1- 7 .

8. U. Goginava, Fejėr means of Walsh-Fourier series, Stud. sci. math. Hung, (to appear).

9. F. Weisz, Martingale Hardy spaces and their application in Fourier analysis, Springer, Berlin-Heideiberg-New York, 1994.

10. F. Weisz, Q-sumability of Fourier series, Acta Math. Hunger, 103(1-2) (2004), 139-176.

11. U. Goginava, The maximal operator of the Marcinkiewicz-Fejėr means of the d-dimensional Walsh-Fourier seriesEast J. Approx. (2006), no. 3, 295-302.

12. I. Blahota, G. Gát, U. Goginava, Maximal operators of Fejėr means of double Vilenkin-Fourier series, Colloq. Math. 107 (2007), no. 2, 287-296.

13. G. Gát, On (C,1) summability of integrable functions with respect to the Walsh-Kaczmarz system, Studia Math. 130 (2) (1998), 139-148.

14. P. Simon, On the Cesáro summability with respect to the Walsh-Kaczmarz system, Journal of Approx. Theory. (2000), 249-261.

15. U. Goginava and K. Nagy, On the maximal operator of Walsh-Kaczmarz-Fejer means, Czechoslovak Math. J. (to appear).

16. F. Weisz, Q-summability of Fourier series, Acta Math. Hungar 103 (2004), 139-176.

17. U. Goginava, On the maximal operator of two parameter Walsh-Kaczmarz-Fejer means, Czechoslovak Math. J. (to appear).
18. F. Móricz, A. Siddiqi, Approximation by Nòrlund means of Walsh-Fourier series. Journal of approximation theory. 70 (1992), 375-389.
19. K. Nagy, Approximation by Nòrlund means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series. Analysis Mathematica, 36 (2010), 299-319.
20. P. Simon and F. Weisz, Weak inequalities for Cesáro and Riesz summability of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory, 151(2008), 1-19.
21. F. Weisz, Cesáro summability of one and two-dimensional Fourier series, Anal. math. Studies, 5 (1996), 353-367.
22. P. Simon, Cesáro summability with respect to two-parameter Walsh systems, Monatsh. Math .131 (2000), 321-334.
23. G. Gát, U. Goginava, Uniform and L-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series. Acta Math. Hunger. 22 (2006), no. 2, 497-506.
24. G. Gát, U. Goginava, On the divergence of Nòrlund logarithmic means of Walsh-Fourier series. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 25 (2009), no 6, 903-916.
25. U. Goginava,The maximal operator of the Fejer means of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement. Publ. Math. Debrecen 71 (2007), no. 1-2, 43-55.
26. G. Gát, U. Goginava, K. Nagy, On the Marcinkiewicz-Fejer means of double Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz systemStudia Sci. Math. Hungarica 46 (3) (2009), 399-421.
27. J. Pál and P. Simon, On a generalization of the comncept of derivate, Acta Math. Hung., 29 (1977), 155-164.
28. F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál, Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger (Bristol-New York 1990).
29. C.N. Moorf, Summable Series and Convergence Factors, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 22 Amer. Math. Soc. Providence, RI,1938.
30. G. Gát, Cesáro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems. J. Approx. Theory 124 (2003), no. 1, 25-43.